ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет»

Численное интегрирование

Методические указания
к практическим занятиям
по курсу «Квадратурные формулы»

Пенза
Издательство
Пензенского государственного
Университета
2007

УДК 517
Ч-66

Рассматриваются вопросы приближенного вычисления определенных интегралов как простых, так и кратных. Решаются задачи повышения точности вычисления интегралов.

Методические указания подготовлены на кафедре «Высшая и прикладная математика» и предназначены для студентов, изучающих курс «Квадратурные формулы», а также могут быть использованы студентами других специальностей при изучении высшей математики.

С о с т а в и т е л ь **Н.Ф. Добрынина**

Р е ц е н з е н т **А.А. Ловков,** кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой «Алгебра» Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского

Предисловие

Основные вопросы, разбираемые на практических занятиях, относятся к общим вопросам теории квадратурных формул: оценке приближений, оптимизации квадратурных формул, выбору наилучшей формулы с использованием различных узлов и весов.

При составлении методических указаний использовалась различная литература, но особое внимание было уделено работам В.И. Крылова и С.М. Никольского.

В основе этой работы лежит теория квадратурных формул, которая, однажды возникнув, развивается по своим внутренним законам, как и другие фундаментальные разделы математики.

Общедоступность вычислительной техники делает необходимым создание комплексов вычислительных программ, разработка которых невозможнабез дальнейшего развития численных методов в практических занятиях.

Специалисты в области теории численных методов непременно будут востребованы в процессе развития науки и техники.

1. Простейшие квадратурные формулы

Предположим, что нужно вычислить приближенно определенный интеграл от некоторой положительной непрерывной функции *f(x)* на отрезке *[a,b]*. Простое приближенное выражение интеграла представляет собой величину площади прямоугольника, основанием которого служит отрезок *[a,b]*, а высотой ордината $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ графика функции f(x) в средней точке $\frac{(a+b)}{2}$ этого отрезка (рис.1). Таким образом, получаем квадратурную формулу

$$\int_a^{в} f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \qquad (1)$$

Формула имеет смысл для любой непрерывной функции.

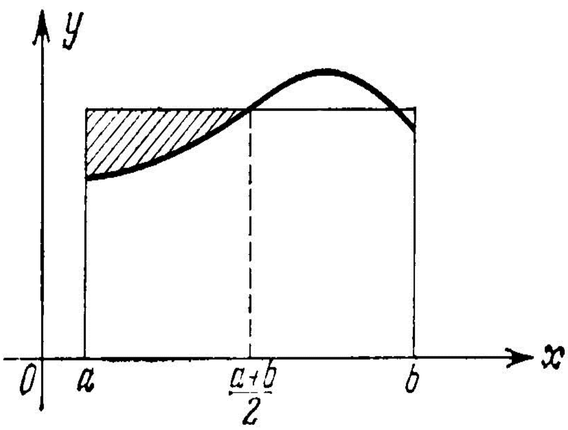


Рис. 1

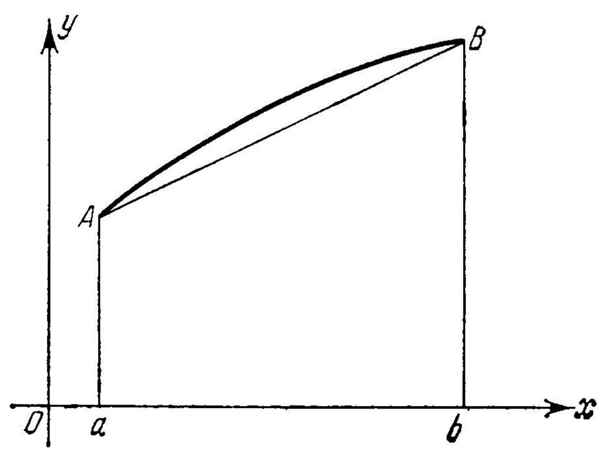
Это простейшая квадратурная формула прямоугольников. Более сложной является формула трапеций. В случае положительной функции *f(x)* она сводится к тому, что определенный интеграл заменяется числом, равным площади трапеции, сторонами которой является отрезок *[a,b]* оси *Ox*, отрезки прямых *x=a* и *x=b* и хорде *AB* графика функции.

Таким образом, квадратурная формула трапеций представляет собой следующее приближенное выражение:

$$\int_b^a f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a+f(b)], \qquad (2)$$

оно имеет смысл для произвольной непрерывной функции.

На практике широко распространена квадратурная формула Симпсона. Она сводится к тому, что определенный интеграл приближенно выражается площадью фигуры, ограниченной отрезком *[a,b]* оси *Ox*, прямыми *x=a*, *x=b* и параболой второй степени, проходящей через точки графика функции *f(x)*, имеющие абсциссы a, $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ и *b* (рис. 2).

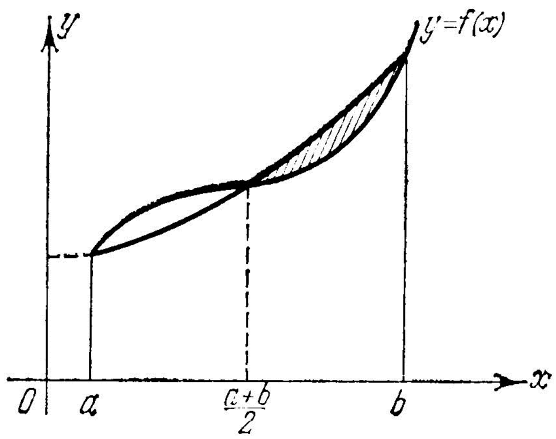


Эта формула имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \qquad (3)$$

Из способа получения формулы Симпсона непосредственно следует , что она точна для всех многочленов второй степени

$$P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2. \qquad (4)$$



Графики этих многочленов представляют собой всевозможные параболы второй степени, оси симметрии которых параллельны оси Oy. Известно, что формула Симпсона точна не только для многочленов второй степени, но и для всех многочленов третьей степени.

Рис 3

Можно построить бесчисленное множество квадратурных формул, точных для всех многочленов

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_mx^m$$

любой наперед заданной степени m. Для получения таких многочленов могут использоваться классические интерполяционные многочлены Лагранжа.

Зададим на отрезке *[a,b]* произвольную систему из $m+1$ точек:

$$a \le x_0 < x_1 < ... < x_m \le b,$$

которые называются *узлами*. Поставим задачу: требуется построить многочлен $P_m(x)$ степени m, совпадающий с заданной функцией $f(x)$ в этих точках. Требуется, чтобы выполнялись равенства

$$f(x_k) = P_m(x_k), \quad k=0,1,..,m.$$

Искомый многочлен - *многочлен Лагранжа* - является единственным и выражается следующей формулой:

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} Q_m^{(k)}(x) f(x_k),$$

где $Q_m^{(k)}$ - многочлен степени m:

$$Q_m^{(k)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_m)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_m)},$$

$k=0,1,..,m.$

На рис.4 схематически изображены графики функции $f(x)$ и ее интерполяционного многочлена Лагранжа четвертой степени, совпадающего с $f(x)$ в пяти равностоящих точках отрезка $[a,b]$.

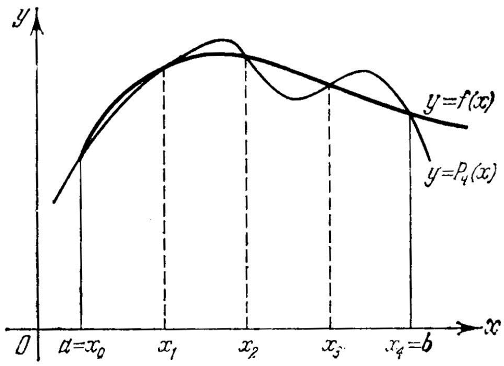


Рис 4

Интерполяционным многочленом Лагранжа можно воспользоваться для получения квадратурной формулы, точной для многочленов степени m.

В качестве приближенного выражения определенного интеграла от функции *f(x)* на отрезке *[a,b]* можно взять определенный интеграл на этом отрезке от интерполирующего функцию *f(x)* многочлена $P_m(x)$. В результате получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_m(x)dx = \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\int_a^b Q_m^{(k)}(x)dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{m} p_k f(x_k), \tag{5}$$

где

$$p_k = \int_a^b Q_m^{(k)}(x)dx, \quad k=0,1,..,m. \tag{6}$$

Приближенное равенство (5) определяет некоторую квадратурную формулу, точную для многочленов степени *m*.

Формула (5), точная для многочленов степени *m*, если она соответствует узлам $x_k = a + \frac{b-a}{m}k$ ($k=0,1,..,m$), делящим отрезок *[a,b]* на равные части, называется *квадратурной формулой Котеса.*

Условимся всякое выражение вида

$$L(f) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k), \tag{7}$$

где p_k – произвольные числа, x_k – произвольные точки, принадлежащие отрезку *[a,b]*, считать приближенным выражение определенного интеграла функции *f(x)* на отрезке *[a,b]*.

Приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx L(f) \tag{8}$$

будем называть *квадратурной формулой*, определяемой весами p_k и узлами x_k.

2. Классы функций.

Введем класс функций, который обозначим $W^{(1)}(M;a,b)$, непрерывных на некотором отрезке $[a,b]$ и имеющих на нем кусочно-непрерывную производную $f'(x)$, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству

$$|f'(x)| \le M .$$

Более хорошими дифференциальными свойствами обладает класс $W^{(2)}(M;a,b)$ функций, непрерывных на отрезке вместе со своими первыми производными и имеющих на нем вторую кусочно-непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству: $|f''(x)| \le M$.

Обобщая эти классы, приходим к классу $W^{(r)}(M;a,b)$, где r - натуральное число. Класс $W^{(r)}(M;a,b)$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a,b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до r-*1* порядка включительно и кусочно-непрерывную r-го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \le M \qquad (1)$$

Можно ввести промежуточные классы. Например, если $0 < \alpha \le 1$, то будем считать, что $H^{\alpha}(M;a,b) = W^{(0)}H^{\alpha}(M;a,b)$ обозначает класс функций $f(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющих для всех точек x и x' этого отрезка неравенству

$$\left|f(x) - f(x')\right| \le M\left|x - x'\right|^{\alpha}$$

Если r – целое неотрицательное число и $0 < \alpha \le 1$, можно определить класс $W^{(r)}H^{(\alpha)}(M;a;b)$ для функций $f(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$, имеющих на нем непрерывные производные порядка r, удовлетворяющие для всех x и x' из $[a,b]$ неравенству

$$\left|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x')\right| \le M\left|x - x'\right|^{\alpha}$$

Введенные таким образом классы $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a,b)$ составляют весьма детальную классификацию непрерывных и дифференцируемых функций.

При увеличении $r+\alpha$ дифференциальные свойства функций, принадлежащих $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a,b)$, улучшаются. Если $r_1+\alpha_1<r_2+\alpha_2$, то класс $W^{(r_2)}H^{(\alpha_2)}(a,b)$ есть часть класса $W^{(r_1)}H^{(\alpha_1)}(a,b)$.

Существует обобщение классов $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a,b)$. Вводится в рассмотрение непрерывная на отрезке *[a,b]* функция $\omega(x)$, удовлетворяющая условиям:

$$\omega(x)=0,\ \ 0\le\omega(x_2)-\omega(x_1)\le\omega(x_2-x_1) \tag{2}$$

для всех x_1, x_2, для которых $a\le x_1\le x_2\le b$. Функция *f(x)*, заданная на отрезке *[a,b]*, по определению принадлежит классу $W^{(r)}H_\omega(a,b)$, если она имеет на этом отрезке производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, удовлетворяющую неравенству

$$\left|f^{(r)}(x_2)-f^{(r)}(x_1)\right|\le\omega(x_2-x_1),\ \ a\le x_1\le x_2\le b. \tag{3}$$

Класс $W^{(r)}H^{(\alpha)}(M;a,b)$ совпадает с классом $W^{(r)}H_w(a,b)$, если $\omega(x)=Mx^\alpha$.

Если на отрезке [a,b] задана произвольная непрерывная функция $\varphi(x)$,

то модулем ее непрерывности на отрезке [a,b], соответствующим данному положительному числу δ, называется величина $\omega(\delta)$, определяемая при помощи равенства :

$$\omega(\delta)=\max_{|x''-x'|<\delta}\left|\varphi(x'')-\varphi(x')\right|,$$

где $a\le x',\ \ x''\le b.$

Таким образом, $\omega(\delta)$ есть наибольшее среди чисел $\left|\varphi(x'')-\varphi(x')\right|$, соответствующих различным парам точек x' и x'' отрезка *[a,b]*, удовлетворяющим неравенству $\left|x''-x'\right|\le\delta$, $\omega(\delta)$ есть монотонно неубывающая функция от δ, так как если $0\le\delta'<\delta''$, то

$$\omega(\delta')=\max_{|x''-x'|<\delta}\left|\varphi(x'')-\varphi(x')\right|\le\max_{|x''-x'|<\delta''}\left|\varphi(x'')-\varphi(x')\right|=\omega(\delta'').$$

Из непрерывности $\varphi(x)$ на замкнутом отрезке *[a,b]* следует свойство ее равномерной непрерывности на *[a,b]*, которое эквивалентно соотношению:

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0 = \omega(0). \tag{4}$$

Далее, если $\delta = \delta_1 + \delta_2$, где $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$ и если x', x'' - точки отрезка *[a,b]*, *[a,b]*, для которых $|x'' - x'| \leq \delta$, то очевидно, на отрезке *[a,b]* найдется такая точка x_0, что для нее одновременно выполняются неравенства $|x' - x_0| \leq \delta_1$, $|x'' - x_0| \leq \delta_2$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \omega(\delta) &= \max_{|x''-x'| \leq \delta} |\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq \max_{\substack{|x'-x_0| \leq \delta_1 \\ |x''-x_0| \leq \delta_2}} \{|\varphi(x') - \varphi(x_0)| + |\varphi(x'') - \varphi(x_0)|\} \leq \\ &\leq \max_{|x'-x_0| \leq \delta_1} |\varphi(x') - \varphi(x_0)| + \max_{|x''-x_0| \leq \delta_2} |\varphi(x'') - \varphi(x_0)| = \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) \end{aligned} \tag{5}$$

Свойство монотонности функции $\omega(\delta)$ и соотношение (5) можно объединить в следующие два равенства:

$$0 \leq \omega(\delta'') - \omega(\delta') \leq \omega(\delta'' - \delta'), \tag{6}$$

которые должны иметь место для любых δ', δ'', удовлетворяющих неравенствам $0 \leq \delta' \leq \delta''$.

Из формул (4) и (6) следует непрерывность $\omega(\delta)$ для всех $\delta \geq 0$.

3. Формула Тейлора.

Рассмотрим функцию *f(x)*, определенную на отрезке *[a,b]*, имеющую на нем непрерывные производные до *r-1*-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную порядка *r*.

Таким образом, функция *f(x)* принадлежит классу $W^{(r)}(M; a, b)$ с некоторой постоянной *M*.

Для такой функции при помощи последовательного применения метода интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt = \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(t)\,|_a^x + \frac{1}{(r-2)!}\int_a^x (x-t)^{r-2} f^{(r-1)}(t)dt =$$

$$= -\frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(a) + \frac{(x-t)^{r-2}}{(r-2)!} f^{(r-2)}(t)\,|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{(r-3)!}\int_a^x (x-t)^{r-3} f^{(r-2)}(t)dt = ... =$$

$$= -\frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(a) - \frac{(x-a)^{r-2}}{(r-2)!} f^{(r-2)}(a) - ... - f(a) + f(x).$$

Отсюда получаем, что для всякой функции *f(x)* класса $W^{(r)}(M;a,b)$ справедлива *формула Тейлора*:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(a) + R_r(x) \qquad (1)$$

с остаточным членом в интегральной форме:

$$R_r = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt. \qquad (2)$$

Введем функцию $K_r(u)$ определяемую при помощи равенств

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1},\ u \ge 0; \\ 0,\ u < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда выражение для остаточного члена $R_r(x)$ можно записать в виде:

$$R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t)dt. \qquad (4)$$

Обозначим через $W_a^{(r)}(M;c,d)$ класс функций $f \in W^{(r)}(M;c,d)$, удовлетворяющих условиям:

$$f(a) = f'(a) = ... = f^{(r-1)}(a) = 0$$

Очевидно, что для $f \in W_a^{(r)}(M;a,b)$

$$f(x) = R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t)dt. \tag{5}$$

4. Точная оценка приближения квадратурной формулы.

Рассмотрим произвольную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx L(x), \tag{1}$$

$$L(f) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k), \tag{2}$$

определяемую заданными весами p_k $(k=0,1,\ldots,m-1)$ и узлами $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \le b$. Предположим, что эта формула точна для всех многочленов

$$P_{r-1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1}x^{r-1}$$

степени *r-1* $(r \ge 1)$, т.е. для всех таких многочленов выполняется равенство

$$\int_a^b P_{r-1}(x)dx = L(P_{r-1}).$$

Получим точное выражение для оценки приближения при помощи этой квадратурной формулы для функций класса $W^{(r)}(M;a,b)$.

Зададим произвольную функцию *f(x)*, принадлежащую классу $W^{(r)}(M;a,b)$. Она определена на отрезке *[a,b]*, имеет на нем непрерывные производные до порядка *r-1* включительно и кусочно-непрерывную производную $f^{(r)}(x)$ порядка *r* , удовлетворяющую неравенству

$$\left| f^{(r)}(x) \le M \right|. \tag{3}$$

Разложим по степеням *x-a* $(a \le x \le b)$ с остаточным членом $R_r(x)$

$$f(x) = P_{r-1}(x) + R_r(x)$$

$$P_{r-1}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \tag{4}$$

$$R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t) dt.$$

В силу того, что наша квадратурная формула точна для многочленов степени *r-1,* имеем:

$$\int_a^b f(x)dx - L(f) = \int_a^b P_{r-1}(x)dx - L(P_{r-1}) + \int_a^b R_r(x)dx - L(R_r) = \int_a^b R_r(x)dx - L(R_r) =$$
$$= \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b \int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t) dt dx - \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} p_k \int_a^b K_r(x_k - t) f^{(r)}(t) dt =$$
$$= \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b \left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k - t) \right] f^{(r)}(t) dt. \tag{5}$$

Если ввести в рассмотрение функцию

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k - t) \right], \tag{6}$$

то получим следующее точное выражение погрешности приближения рассматриваемой квадратурной формулы для данной функции *f(x)* класса $W^{(r)}(M; a, b)$:

$$\int_a^b f(x)dx - L(f) = \int_a^b F_r(t) f^{(r)}(t) dt\,. \tag{7}$$

Отметим, что функция $F_r(t)$ не зависит от отдельных функций f класса $W^{(r)}(M; a, b)$ и не зависит от M

.

Формула (7) дает точное выражение приближения квадратурной формулы (1) через производную порядка r от функции *f(x)*. Эта формула будет служить исходной для получения различных оценок, связанных с приближениями квадратурных формул.

Поскольку функция f принадлежит классу $W^{(r)}(M;a,b)$, должно выполняться неравенство (3) и

$$\left|\int_a^b f(x)dx - L(f)\right| \le M\int_a^b |F_r(t)|dt = Mc_r \ . \tag{8}$$

При этом в неравенстве правую часть нельзя уменьшить, поскольку

$$f^{(r)}(x) = M\,sign\,F_r(x)\,. \tag{9}$$

Постоянную c_r можно вычислить точно или с любой степенью точности приближенно, поскольку она задается при помощи известных для каждой квадратурной формулы весов p_k и x_k .

5. Численные постоянные для частных квадратурных формул.

Пусть *a=0, b=1.* Тогда имеем

$$\int_0^1 fdx - L(f) = \int_0^1 F_r(t)f^{(r)}(t)dt, \tag{1}$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k - t)\right].. \tag{2}$$

Положим

$$c_r = \int_0^1 |F_r(t)|dt = \max_{f\in W^{(r)}(1;0,1)}\left|\int_0^1 fdx - L(f)\right|. \tag{3}$$

Надо иметь ввиду, что

$$\max_{f\in W^{(e)}(M;0,1)}\left|\int_0^1 fdx - L(f)\right| = Mc_r.$$

<u>Формула прямоугольников.</u> Для нее $m=1,\ p_0=1,\ x_0=1/2$. Она точна для линейных функций – многочленов первой степени. Поэтому $r=1,2$.

Для нее

$$c_1 = \int_0^1 \left|(1-t) - K_1(\frac{1}{2}-t)\right| dt = \int_0^{1/2} \left|(1-t)-1\right| dt + \int_{1/2}^1 (1-t)dt = \frac{1}{4},$$

$$c_2 = \int_0^{1/2} \left|\frac{(1-t)^2}{2} - (\frac{1}{2}-t)\right| dt + \int_{1/2}^1 \frac{(1-t)^2}{2} dt = \frac{1}{24}.$$

<u>Формула трапеций.</u> В этом случае $m=2,\ p_0=p_1=1/2,\ x_0=0,\ x_1=1$. Формула точна для многочленов первой степени, поэтому $r=1,2$.

$$c_1 = \int_0^1 \left|(1-t) - \frac{1}{2}K_1(-t) - \frac{1}{2}K_1(1-t)\right| dt = \frac{1}{4},$$

$$c_2 = \int_0^1 \left|\frac{(1-t)^2}{2} - \frac{1}{2}K_2(-t) - \frac{1}{2}K_2(1-t)\right| dt = \frac{1}{12}.$$

<u>Формула Симпсона.</u> Для этой формулы $m=3,\ p_0=p_2=1/6,\ p_1=2/3,\ x_0=0,\ x_1=1/2,\ x_2=1$. Вычисления показывают, что $c_1=5/36,\ c_2=1/81,\ c_3=1/576,\ c_4=1/2880$

.

<u>Формула Котеса.</u> Если построить квадратурную формулу с четырьмя равностоящими узлами ($k=0,1,2,3$), то $p_0=p_3=1/8,\ p_1=p_2=3/8,\ x_k=k/3$. Она точна для всех многочленов третьей степени и поэтому для нее существуют постоянные c_k при $k=1,2,3,4,\ c_4=1/6480$. Формула Котеса с пятью узлами $(k=0,1,2,3,4)$ имеет следующие веса:

$$p_0=p_3=7/90,\ p_1=p_3=32/90,\ p_2=12/90,\ x_k=k/4$$

.

Она точная для многочленов пятой степени. Для нее $c_5=1/345600,\ c_6=1/193560 \approx 517*10^{-9}$.

6. Усложненные квадратурные формулы. Оценка приближений сверху для классов функций.

Зададим на отрезке [0,1] систему точек (узлов)

$$0 \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \le 1. \qquad (1)$$

и чисел (весов)

$$p_0\,,\ p_1\,,\ \ldots,\ p_{m-1} \qquad (2)$$

и составим линейный функционал

$$L(f) = L(0,1;f) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k)\,, \qquad (3)$$

где f – произвольная непрерывная на отрезке [0,1] функция.

Будем считать, что *L(f)* есть приближенное выражение для интеграла от *f(x)* на отрезке [0,1]:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx L(f)\,. \qquad (4)$$

Таким образом, приближенная квадратурная формула (4) определена узлами (1) и весами (2).

Пусть задан произвольный отрезок $[\alpha,\beta]$. Квадратурную формулу

$$\int_\alpha^\beta f(x) \approx L(\alpha,\beta;f);\ \ L(\alpha,\beta;f) = \sum_{k=0}^{m-1} p'_k f(x'_k) \qquad (5)$$

будем называть *подобной формуле* (4), а функционал $L(\alpha,\beta;f)$ - *подобным функционалу L(f)*, если выполняются соотношения

$$x'_k = \alpha + x_k(\beta-\alpha),\ \ p'_k = p_k(\beta-\alpha),\ \ k = 0,1,..m-1.$$

На практике, если потребуется вычислить приближенно определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

обычно поступают следующим образом: выбирают квадратурную формулу (4), делят отрезок *[a,b]* на *n* равных частей точками

$$\xi_k = a + \frac{b-a}{n}k, \qquad (6)$$

и к каждому отдельному частичному интервалу (ξ_k, ξ_{k+1}) *(k=0,1,…,n-1)* применяют квадратурную формулу. В результате можно получить

$$\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f(x)dx \approx L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)$$

Таким образом, исходя из квадратурной формулы (4), которую будем называть канонической, получаем усложненную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) \qquad (7)$$

Например, усложненная квадратурная формула прямоугольников, выглядит так:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x'_k),$$

где

$$x'_k = a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}, \; k=0,1,\dots,n-1.$$

Усложненная квадратурная формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(\xi_0) + 2f(\xi_1) + 2f(\xi_2) + \dots + 2f(\xi_{n-1}) + f(\xi_n)\right],$$

где числа ξ_k определяются равенствами (6).

Усложненная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right\},$$

где $x_i = a + i\frac{b-a}{2n}$, $i = 0,1,...,2n.$

Если квадратурная формула (4) точна для всех многочленов $P_\rho(x)$ степени ρ, т.е. если для всех $P_\rho(x)$ выполняется равенство

$$\int_0^1 P_\rho(x)dx = L(P_\rho), \tag{8}$$

то это же имеет место для соответствующей усложненной формулы (7).

По формуле (4) из разд. 4 имеем

$$\int_0^1 fdx - L(f) = \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t)dt\,, \tag{9}$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\int_0^1 \frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m} p_k K_r(x_k - t)\right]. \tag{10}$$

Положим

$$c_r = \max_{f \in W^r(1;0,1)} \left|\int_0^1 fdx - l(f)\right| = \int_0^1 |F_r(t)|dt\,. \tag{11}$$

Теорема 1. Если квадратурная формула (4) точна для всех многочленов степени r-1, то для любой функции f, принадлежащей классу $W^{(r)}(M;a,b)$ имеет место неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)\right| \le \frac{(b-a)^{r+1} c_r M}{n^r}. \tag{12}$$

Существует функция f_*, зависящая от n, принадлежащая классу $W^{(r)}(M;a,b)$, для которой неравенство (12) превращается в равенство.

Доказательство. На основании свойств подобия функционала $L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)$ функционалу $L(f)$ и равенства (9) имеем

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k,\xi_{k+1};f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} fdx - L(\xi_k,\xi_{k+1};f)\right\} =$$
$$= h\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_0^1 f(\xi_k+hu)du - L[f(\xi_k+hu)]\right\} = \tag{13}$$
$$= h^{r+1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 F_r(u)f^{(r)}(\xi_k+hu)du, \quad h=\frac{b-a}{n}.$$

Если функция f принадлежит классу $W^{(r)}(M;a,b)$, то

$$\left|\int_a^b fdx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k,\xi_{k+1};f)\right| \le h^{r+1}\sum_{r=0}^{n-1} M\int_0^1 |F_r(t)|dt = \tag{14}$$
$$= \frac{(b-a)^{r+1}c_r M}{n^r},$$

что доказывает неравенство (12).

Остается показать возможность построения функции $f_* \in W^{(r)}(M;a,b)$, для которой неравенство (12) обращается в равенство. Пусть $f_k(x)$ есть некоторая функция, определенная на отрезке $[\xi_k,\xi_{k+1}]$, имеющая кусочно-непрерывную производную порядка r и удовлетворяющая условию

$$f_k^{(r)}(\xi_k+hu) = MsignF_r(u), \tag{15}$$

$$0<u<1, \quad k=0,1,...,n-1$$

Положим $f_* = f_0(x)$ на отрезке $[\xi_0,\xi_1]$. Если функция $f_*(x)$ уже определена на отрезке $[\xi_0,\xi_k]$ и имеет на его конце ξ_k производные, равные

$$f_*(\xi_k)=\alpha_0, f_*'(\xi_k)=\alpha\ ,..., f_*^{(r-1)}(\xi_k)=\alpha_{r-1},$$

то положим

$$f_*(x) = f_k(x) + P_{r-1,k}(x) \tag{16}$$

на отрезке $[\xi_k,\xi_{k+1}]$, где $P_{r-1,k}(x)$ есть многочлен степени $r-1$, подобранный так, чтобы правая часть (16) в точке ξ_k имела производные до $r-1$-го порядка включительно, равные соответственно числам $\alpha_{0,}\alpha_1,...,\alpha_{r-1}$.

Функция $f_*(x)$ полностью определена на отрезке $[a,b]$. Она, очевидно, принадлежит к классу $W^{(r)}(M;a,b)$. Подставим ее в (13) и примем во внимание, что

$$\frac{d^r}{dx^r}P_{r-1,x}(x)\equiv 0.$$

Тогда на основании (15) получим

$$\int_a^b f_*dx-\sum_{k=0}^{n-1}L(\xi_k,\xi_{k+1};f_*)=h^{r+1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_0^1 F_r(u)MsignF_r(u)du=Mh^{r+1}n\int_0^1|F_r(u)|du=\frac{(b-a)^{r+1}c_rM}{n^r},$$

и теорема доказана.

Теорема 2. Если квадратурная формула (4) точна для всех постоянных (многочленов нулевой степени), то для всякой функции $f(x)$, принадлежащей классу $H_\omega(a,b)$, имеет место неравенство

$$\left|\int_a^b fdx-\sum_{k=0}^{n-1}L(\xi_k,\xi_{k+1};f)\right|\le\left(1+\sum_{k=0}^{m-1}|p_k|\right)(b-a)\omega(\frac{b-a}{n})$$

Доказательство. Допустим, что функция f принадлежит классу $H_\omega(0,1)$ и пусть

$$f(x)=f(0)+\varphi(x).$$

Тогда

$$|\varphi(x)|=|f(x)-f(x)|\le\omega(1).$$

В силу того, что квадратурная формула (4) точна для постоянных, имеем

$$\left|\int_0^1 fdx-l(f)\right|=\left|\int_0^1\varphi dx-\sum_{k=0}^{m-1}p_k\varphi(x_k)\right|\le\omega)(1)(1+\sum_{k=0}^{m-1}|p_k|).$$

Если функция f принадлежит классу $H_\omega(a,b)$, то учитывая формулу (13) и

$$\left| f(\xi_k + hu'') - f(\xi_k + hu') \right| \le \omega(h(u' + u'')) \le \omega(h),$$

$$0 \le u' \le u' \le 1,$$

получаем:

$$\left| \int_a^b f dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) \right| \le h \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_0^1 f(\xi_k + hu) du - L[f(\xi_k + hu)] \right| \le h \sum_{k=0}^{n-1} \omega(h)(1 + \sum_{k=0}^{m-1} |p_k|) =$$

$$= (1 + \sum_{k=0}^{m-1} |p_k|)(b-a)\omega(\frac{b-a}{n}), \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Теорема 3. Если квадратурная формула (4) точна для многочленов степени r, то для всех функций f, принадлежащих классу $W^{(r)}H_\omega(a,b)$, при $r \ge 1$ имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b f dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) \right| \le (b-a)^{r+1} c_r \frac{\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)}{n^r}, \tag{17}$$

где c_r определяется формулой (11).

<u>Доказательство.</u> Если в равенство

$$\int_0^1 f dx - L(f) = \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t) dt,$$

которое было введено при условии, что квадратурная формула (4) точна для многочленов степени (r-1), подставить в качестве функции $f(x)$ функцию x^r, то выполняется равенство

$$\int_0^1 F_r(t) dt = 0\,. \tag{18}$$

Пусть функция f принадлежит классу $W^{(r)}\, H_w\,(a,b)$. Применим к ней преобразование (13). Учитывая формулу (18), получаем

$$|\int_a^b f dx - \sum_{K=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)| = h^{r+1} |\sum_{K=0}^{n-1} \int_0^1 F_r(n) f^{(r)}(\xi_k + hn)\, dn| =$$

$$= h^{r+1} \mid \sum_{K=0}^{n-1}\int_0^1 F_r(n)\,[f^{(r)}(\xi_k + hn) - f^{(r)}(\xi_k)]\,dn \mid \le$$

$$\le h^{r+1} \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \mid F_r(n) \mid \omega(h)\,dn = (b-a)^{r+1} c_r \frac{\varpi(\frac{b-a}{n})}{n^r},$$

и теорема доказана.

7. Оценки для индивидуальных функций. Выбор квадратурной формулы.

В разд. 6 была доказана теорема 1 о том, что если функция f принадлежит классу $W^{(r)}(\mu; a, b)$, то можно применить усложненную квадратурную формулу

$$\int_a^b f\,dx \approx \sum_{K=0}^{n-1} L(\xi_{k-1}, \xi_k; f) \tag{1}$$

точную для многочленов степени *(r-1)*, и порядок приближения при помощи этой формулы равен $O(n^{-r})$. Этот результат дает оценку приближения сверху для всего класса функций $W^{(r)}(\mu; a, b)$. В этом параграфе будет показано, что какова бы ни была функция f класса $W^{(r)}(\mu; a, b)$, если она не многочлен степени *(r - 1)*, то порядок приближения, даваемого квадратурной формулой (1) строго равен $O(n^{-r})$. Докажем теорему.

Теорема 4. Пусть функция f (x) имеет на отрезке [a, b] непрерывную производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, $\xi_k = a + \frac{b-a}{n}k$ (k = 0, 1, …, n-1), l – натуральное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < l \le n$, ω (k) – модуль непрерывности функции $f^{(r)}$ имеет на отрезке [a, b]. Пусть квадратурная формула (1) является точной для многочленов степени (r-1) и χ – константа, определяемая равенством

$$\chi = \int_0^1 F_r(t)\,dt. \tag{2}$$

Тогда имеет место следующее асимптотическое равенство :

$$\int_a^{\xi_l} f\,dx - \sum_{K=0}^{L-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)^r \{x\int_a^{\xi_l} f^{(r)}(x)\,dx + O[\omega(h)]\}, \; h = \frac{b-a}{n},$$

(3)

где константу с, входящую в оценку $O[\varpi(h)] \le c\omega(h)$, можно взять не зависящей от l и модуля непрерывности ω функции $f^{(r)}(x)$.

<u>Доказательство.</u> Подобно формуле (13) из разд. 6 имеем

$$\int_a^{\xi_L} f(x)dx - \sum_{K=0}^{L-1} L(\xi_K, \xi_{K+1}; f) = \sum_{K=0}^{L-1}\{\int_{\xi_K}^{\xi_{K+1}} fdx - L(\xi_K, \xi_{K+1}; f)\} =$$

$$= h\sum_{K=0}^{L-1}\{\int_0^1 f(\xi_K + hn)dn - L[f(\xi_K + hn)]\} = h^{r+1}\sum_{K=0}^{L-1}\int_0^1 F_r(n) f^{(r)}(\xi_K + hn)dn = h^r(\sigma_1 + \sigma_2),$$

(4)

$$h = \frac{a-b}{n},$$

где

$$\sigma_1 = h\sum_{K=0}^{L-1}\int_0^1 F_r(n) f^{(r)}(\xi_K)dn = h\chi\sum_{K=0}^{L-1} f^{(r)}(\xi_K),$$

(5)

$$\sigma_2 = h\sum_{K=0}^{L-1}\int_0^1 F_r(n)\,[f^{(r)}(\xi_K + hn) - f^{(r)}(\xi_K)]dn.$$

Но $\left| \int_0^{\xi_L} f^{(r)}dx - h\sum_{K=0}^{L-1} f^{(r)}(\xi_K) \right| \le \sum_{K=0}^{L-1} \int_{\xi_K}^{\xi_{K+1}} \left| f^{(r)}(x) - f^{(r)}(\xi_K) \right| dx \le$

$$\le \sum_{K=0}^{L-1} h\,\omega(h) \le \frac{l(b-a)}{n}\,\omega(h) \le (b-a)\,\omega(h), \tag{6}$$

поэтому

$$\sigma_1 = \chi\int_0^{\xi_L} f^{(r)}(x)dx + O[\,\omega(h)]. \tag{7}$$

При этом в качестве постоянной, входящей в оценку $O[\ \omega(h)]$, можно взять число $|\chi|(b-a)$, т.е. величину, не зависящую от l и $f^{(r)}$. Оценим σ_2.

$$\left|\sigma_2\right| \le h \sum_{r=0}^{L-1} \int_0^1 \left| \ F_r(n) \ \right| \omega(h) dn \le (b-a) \int_0^1 \left| \ F_r(n) \ \right| dn \ \omega(h) = (b-a)\ c_r \ \omega(h) = O[\omega(h)]. \quad (8)$$

Таким образом, формула (3) доказана формулами (4) - (8), причем постоянная, входящая в величину $O[\omega(h)]$, не зависит от l и $f^{(r)}$. Проанализируем полученную формулу (3). В ее правую часть входит постоянная χ, определяемая равенством (2). Если рассматриваемая квадратурная формула точна для многочленов степени $(r-1)$, неточна для многочленов степени r, то она и неточна для функции $x^{\ r}$. поэтому на основании формулы (7) получим

$$\chi = \int_0^1 F_r(t) dt = \frac{1}{r!} \int_0^1 F_r(t) \frac{d^r t^r}{dt^r} dt = \frac{1}{r!} \{ \ \int_0^1 \ t^r dt - L(t^r) \ \} \ne 0.$$

Но тогда интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f^{(r)}(t) dt$$

не равен тождественно нулю на $[a,b]$. Пусть x_0 есть точка отрезка $[a,b]$ такая, что $\Phi(x_0) \ne 0$, и пусть l есть такое натуральное число, для которого выполняются неравенство

$$\xi_l \le x_0 < \xi_{l+1}.$$

Таким образом, l есть функция от n. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i = x_0$.

Вернемся к рассмотрению интеграла

$$\int_a^{\xi_l} f^{(r)}(x) dx = \Phi(x_0) - \int_{\xi_l}^{x_0} f^{(r)}(x) dx = \Phi(x_0) + O(h), \qquad (10)$$

так как

$$\left| \int_{\xi_l}^{x_0} f^{(r)}(x) dx \right| \le M \left| x_0 - \xi_l \right| \le Mh,$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(r)}(x) \right|$, интеграл ограничен.

После подстановки равенства (10) в формулу (3) получим

$$\int_a^{\xi_l} fdx - \sum_{k=0}^{l-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) = \left(\frac{(b-a)}{n} \right)^r \{\chi\Phi(x_0) + O(h) + O[\omega(h)]\} = \left(\frac{(b-a)}{n}\right)^r \{\chi\Phi(x_0) + \varepsilon_h\} \qquad (11)$$

$\varepsilon_n \to 0$ при $h \to 0$

Первое слагаемое суммы, стоящей в фигурных скобках, заведомо не равно нулю, а второе ε_h стремится к нулю при $n \to 0$. Отсюда следует, что левая часть (11) имеет порядок, строго равный $O(n^{-r})$. Полученный результат приводит к теореме.

Теорема 5. Если функция f имеет непрерывную, не равную тождественно нулю производную $f^{(r)}(x)$ порядка r и квадратурная формула (1) точна для многочленов степени $r-1$, но не точна для многочленов степени r, то существует положительная постоянная c и точка x_0 на отрезке $[a,b]$ такие, что имеет место неравенство

$$\left| \int_a^{\xi_l} fdx - \sum_{k=0}^{l-1} L(\xi_{k-1}, \xi_k; f) \right| > \frac{c}{n^2} \qquad (12)$$

для всех $n = 1,2,...,$ где l - наибольше натуральное число, при котором $\xi_l \le x_0$. В частности, если

$$\int_a^b f^{(r)}(x)dx \ne 0,$$

то можно считать $l = n$ и, таким образом, $\xi_n = b$. Если же

$$\int_a^b f^{(r)}(x)dx = 0\,,$$

то $x_0 < b$.

Теорема 5 является дополнением к теореме 1.

Теорема 1 может быть усилена в виде теоремы 6.

Теорема 6. Если квадратурная формула (1) точна для всех многочленов степени $r-1$, то для любой функции f, принадлежащей классу $W^{(r)}(M;a,b)$, имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f dx - L(\xi_k,\xi_{k+1};f)\right| \le \frac{(b-a)^{r+1}c_r M}{n^r} \tag{13}$$

Соответствующим аналогом теоремы 5 является следующая теорема.

Теорема 7. Если функция f имеет непрерывную, не равную тождественно нулю производную $f^{(r)}(x)$ порядка r и квадратурная формула (1) точна для многочленов степени $r-1$, но не точна для многочленов степени r, но существует положительная постоянная c такая, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f dx - L(\xi_k,\xi_{k+1};f)\right| > \frac{c}{n^{\kappa}}$$

для всех $n=1,2,\dots$.

Таким образом доказано, что для всех функций, имеющих непрерывную на $[a,b]$ производную порядка r, исключая многочлен P_{r-1} степени $r-1$, приближение при помощи квадратурной формулы (1) имеет порядок, строго равный $O(n^{-r})$. Следовательно, если функция $f(x)$ имеет производную более высокого порядка чем r, при применении для вычисления ее определенного интеграла квадратурной формулы (1), точной только для многочленов P_{r-1}, мы заведомо не сможем получить лучший эффект в смысле порядка приближения по сравнению с тем, который имеет место для функций, обладающих разрывной производной $r-$го порядка. Например, как бы ни была хороша функция, если только она не многочлен третьей степени, порядок приближения ее интеграла при помощи усложненной формулы Симпсона заведомо не может быть лучше, чем $O(n^{-4})$.

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ пятую производную, то для того, чтобы это дифференциальное свойство функции могло дать полный эффект в смысле порядка приближения квадратурной формулы, необходимо взять квадратурную формулу, точную для всех многочленов четвертой степени, например, усложненную формулу Котеса с пятью узлами.

8. Постоянная χ. Уточнение квадратурной формулы.

Постоянные χ могут играть существенную роль при построении квадратурных формул

$$\chi = \int_0^1 F_r(t)dt.$$

Пусть для вычисления определенного интеграла на отрезке $[a,b]$ от некоторой функции $f(x)$ мы воспользовались определенной усложненной формулой

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f), \tag{1}$$

точной для всех многочленов степени $r-1$. Если эта функция имеет определенную производную порядка r, то порядок приближения формулы (1) равен $O(n^{-r})$. Если функция имеет производную порядка $r+1$ и формула не точна для многочленов степени r, то улучшения порядка приближения не будет. Однако, можно добавить к правой части приближенного равенства (1) несложное выражение такое, что оно приведет к новой квадратурной формуле, дающей приближение порядка $O(n^{-r-1})$ для функций непрерывной производной $f^{(r+1)}(x)$.

Будем считать, что функция $f(x)$ задана и имеет непрерывную производную порядка $r+1$ на отрезке $[a,c]$, где $b>c$.

Положим

$$\Delta_k f = f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k), \ \Delta_k^{\,2} f = \Delta_{k+1} f - \Delta_k f, \ \Delta_k^{\,3} f = \Delta_{k+1}^2 f - \Delta_k^2 f, \ldots$$

и покажем, что квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) + h\chi(\Delta_n^{r-1} f - \Delta_0^{r-1} f), \; h = \frac{b-a}{n} \tag{2}$$

дает для всех функций $f(x)$, имеющих непрерывную производную порядка $r+1$, приближение порядка $O(n^{-r-1})$.

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k^r f = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1}^{r-1} f - \Delta_k^{r-1} f) = \Delta_n^{r-1} f - \Delta_0^{r-1} f .$$

По теореме о среднем имеет место равенство

$$\frac{\Delta_k^r f}{h^r} = f^{(r)}(\xi_k + rh\theta_k), \text{ где } 0 < \theta_k < 1 .$$

Поэтому в силу равенства (13) из разд. 6 имеем

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) - h\chi(\Delta_n^{r-1} f - \Delta_0^{r-1}) \right| =$$

$$= \left| h^{r+1} \sum_{k=0}^{n-1} \int F_r(u) f^{(r)}(\xi_k + hu)du - h^{r+1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 F_r(u) \frac{\Delta_h^r f}{h^r} du \right| \geq$$

$$\leq h^{r+1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 |F_r(u)| \left| f^{(r)}(\xi_k + hu) - f^{(r)}(\xi_k + rh\theta_k) \right| du \leq$$

$$\leq h^{r+1} rhnc_r K_{r+1} = K_{r+1} r(b-a)c_r h^{r+1} = O(n^{-r-1}),$$

где $c_r = \int_0^1 |F_r(t)| dt, \quad K_{r+1} = \max_{a \leq x \leq c} \left| f^{(r+1)}(x) \right|$.

Утверждение доказано.

При помощи формул (2) можно уточнить результат формулы (1).

9. Оценки для многомерных квадратурных формул.

При приближенном вычислении кратных интегралов

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$$

часто применяют квадратурные формулы, которые можно получить из одномерных квадратурных формул

$$\int_0^1 f(x)dx \approx L(f), \qquad \int_0^1 fdy \approx L_1(f), \tag{1}$$

где

$$L(f) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k),\ 0 \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \le 1,$$

$$L_1(f) = \sum_{k=0}^{m_1-1} P'_k f(y_k), \quad 0 \le y_0 < y_1 < \ldots < y_{m_1-1} \le 1.$$

При этом будем предполагать, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k = \sum_{k=0}^{m_1-1} \ p'_k = 1. \tag{2}$$

Если в квадрате $0 \le x$, $y \le 1$ задана непрерывная функция $f(x,y)$, то мы можем для приближенного вычисления ее кратного интеграла применить следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy \approx \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m_1-1} p_k p_l f(x_k, y_l) = L(0,1,0,1; f) \tag{3}$$

Пусть имеем два класса непрерывных функций $\varphi = \varphi(x)$, заданных на отрезке $[0,1]$: M' и M''.

Обозначим через c' верхнюю грань погрешности:

$$c' = \sup_{\varphi \in \mathrm{M}'} \left| \int_0^1 \varphi dx - L(\varphi) \right|,$$

распространенную на все функции φ класса M'. Иначе говоря, постоянная c' есть наименьшее число среди чисел λ, для которых выполняются неравенства:

$$\left|\int_0^1 \varphi dx - L(\varphi)\right| \le \lambda \tag{5}$$

для всех функций φ класса M'.

Аналогично, положим

$$c'' = \sup_{\varphi\in \mathrm{M}''}\left|\int_0^1 \varphi dy - L_1(\varphi)\right|. \tag{6}$$

Пусть функция $f(x,y)$, заданная в прямоугольнике $0 \le x$, $y \le 1$, обладает тем свойством, что для всякого фиксированного y как функция от x, она принадлежит к M' и для всякого фиксированного x как функция от y принадлежит к M''. В силу формул (2), (4) и (6) приближение при помощи двумерной формулы (3) будет удовлетворять неравенству

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy - \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1-1} p_k p_l' f(x_k,y_l)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy - \int_0^1 \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k,y)dy + \sum_{k=0}^{m-1} p_k \int_0^1 f(x_k,y)dy - \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m_1-1} p_k p_l' f(x_k,y_l)\right| \le$$

$$\le \int_0^1\left|\int_0^1 f(x,y) - \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k,y)\right|dy + \sum_{k=0}^{m-1}|p_k|\left|\int_0^1 f(x_k,y)dy - \sum_{l=0}^{m_1-1} p_l' f(x_k,y_l)\right| \le c' + c''\sum_{k=0}^{m-1}|p_k| \tag{7}$$

или неравенству

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy - \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1-1} p_k p_l' f(x_k,y_l)\right| \le c'\sum_{l=0}^{m_1-1}|p_l'| + c''. \tag{8}$$

Исходя из формулы (3) можно для произвольного прямоугольника $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ построить кубатурную формулу

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy \approx L(a,b;c,d)=(b-a)(d-c)\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1-1} p_k p' f(a+(b-a)x_k, c+(d-c)y_l)\,.$$

Данный прямоугольник можно разбить на $\mu\nu$ равных прямоугольников:

$$\delta_{ij}(\xi_i \le x \le \xi_{i+1}, \eta_j \le y \le \eta_{j+1}) \ \ (i=0,1,...,\mu-1; j=0,1,...,\nu-1)\,.$$

Точки ξ_i и η_j делят соответственно отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ на равные части, а затем к каждому прямоугольнику применим кубатурную формулу. Получим кубатурную формулу:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1} L_{ij}(f),$$

где

$$L_{ij}(f)=(\xi_{i+1}-\xi_1)(\eta_{k+1}-\eta_k)\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1-1} p_k p_l' f(\xi_i+(\xi_{i+1}-\xi_i)x_k, \eta_j+(\eta_{j+1}-\eta_j)y_l).$$

Сформулируем и докажем несколько теорем, дающих оценки приближения кубатурных формул.

Теорема 1. Пусть функция $f(x,y)$ имеет частные производные по x порядка r и по y порядка s, удовлетворяющие на прямоугольнике $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ неравенствам

$$\left|\frac{\partial^r f}{\partial x^r}\right| \le M,\ \left|\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right| \le N.$$

Пусть квадратурные формулы (1) точны для многочленов степени $r-1$ и $s-1$. Тогда

$$\left|\int_a^b\int_c^d f dxdy - \sum_{i=0}^{\lambda-1}\sum_{j=0}^{\nu-1} L_{ij}(f)\right| \le (b-a)(d-c)\left[c_r M\left(\frac{b-a}{\mu}\right)^r + Nc_r\sum_{k=0}^{m}|p_m|\left(\frac{d-c}{\nu}\right)^s\right],$$

где c_r и c_s - постоянные, определяемые по формуле (3) из § 5 соответственно для $L(f)$ и $L_1(f)$.

Доказательство. Положим $h=\dfrac{b-a}{\mu}$, $g=\dfrac{d-c}{\nu}$. Тогда имеем

$$\int_a^b\int_c^d fdxdy-\sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1}L_{ij}(f)=\sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1}\Big(\ \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}}fdxdy-L_{ij}(f)\ \Big)=$$

$$=hg\sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=o}^{\nu-1}\Big\{\ \left(\int_0^1\int_0^1 f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu)\right)dud\nu-L(0,1,0,1;f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu))\ \Big\}. \qquad (9)$$

Функция $f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu)$ имеет на квадрате $0\le u$, $\nu\le 1$ по u частную производную порядка r, не превышающую по абсолютной величине Mh^r и по ν частную производную порядка s, не превышающую по абсолютной величине Ng^s. Таким образом, она принадлежит при любом фиксированном ν как функция от u и классу $W^{(r)}(Mh^r;0,1)$ и при любом фиксированном u как функция от ν классу $W^{(s)}(Mg^s;0,1)$. Поэтому по формуле (8) из разд. 4 имеет место неравенство

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu)du-L_k(f(\xi_i+hu,\eta_i+g\nu))\right|\le c_rMh^r. \qquad (10)$$

Аналогично,

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i+hu,\eta_k+g\nu)d\nu-L_\nu(f(\xi_i+hu,\eta_k+g\nu))\right|\le c_rNg^s. \qquad (11)$$

Из формул (9) – (11) и учитывая неравенство (7), а также обозначив $c'=c_\kappa Mh^r$, $c''=c_sNg^s$, получим:

$$\left|\int_a^b\int_c^d fdxdy-\sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1}L_{ij}(f)\right|\le$$

$$\le hg\sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1}\left|\int_0^1\int_0^1 f(\xi_i+hu,\eta_k+g\nu)dud\nu-L(0,1,0,1;f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu))\right|\le$$

$$\le\mu\nu hg\left(c_rMh^r+c_sNg^s\sum_{k=0}^{m-1}|p_k|\right)=$$

$$=(b-a)(d-c)\left[c_rM\left(\frac{b-a}{\mu}\right)^r+c_r\sum_{k=0}^{m-1}|p_k|N\left(\frac{d-c}{\nu}\right)^s\right],$$

теорема доказана.

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ удовлетворяет на прямоугольнике $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ условиям

$$\begin{aligned} |f(x',y)-f(x,y)| &\le \omega_1(|x'-x|), \\ |f(x,y')-f(x,y)| &\le \omega_2(|y'-y|), \end{aligned} \tag{12}$$

где ω_1, ω_2 - функции, для которых выполняются неравенства (2) из разд. 2, и, кроме того, квадратурные формулы (1) точны для произвольных констант. Тогда имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b \int_c^d f dx dy - \sum_{i=0}^{\mu-1} \sum_{j=0}^{\nu-1} L_{ij}(f) \right| \le A\omega_1\left(\frac{b-a}{\mu}\right) + B\omega_2\left(\frac{d-c}{\nu}\right), \tag{13}$$

где A и B - постоянные.

Доказательство. Из неравенств (12) следует, что функция $f(\xi_i + hu', \eta_j + g\nu)$ от u и ν на прямоугольнике $0 \le u$, $\nu \le 1$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(\xi_i + hu', \eta_j + g\nu) - f(\xi_i + hu, \eta_J + g\nu)| \le \omega_1(h|u'-u|) = \omega_{1,h}(|u'-u|),$$

$$|f(\xi_i + hu, \eta_j + g\nu') - f(\xi_i + hu, \eta_j + g\nu)| \le \omega_2(g|\nu'-\nu|) = \omega_{2,g}(|\nu'-\nu|).$$

Таким образом, эта функция по переменной u принадлежит классу $H\omega_{1,h}(0,1)$ при любом фиксированном ν и по переменной ν принадлежит классу $H\omega_{2,g}(0,1)$ при любом фиксированном u. Поэтому в силу теоремы 2 из разд. 6 при $a = 0, b = 1, n = 1$ имеют место неравенства

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_j + g\nu)du - L(f(\xi_i + hu, \eta_j + g\nu))\right| \le \left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} |p_k|\right)\omega_1(h),$$

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_j + g\nu)d\nu - L_\nu(f(\xi_i + hu, \eta_i + g\nu))\right| \le \left(1 + \sum_{l=0}^{m_1-1} |p'_l|\right)\omega_s(g),$$

и, следовательно, из (9) на основании неравенства (7), в котором надо считать

$$c' = \left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} |p_k|\right)\omega_l(h),\ c'' = \left(1 + \sum_{l=0}^{m_1-1} |p'_l|\right)\omega_r(g),$$

получим

$$\left|\int_a^b\int_c^d fdxdy - \sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1} L_{ij}(f)\right| \le \mu\nu hg(A_1\omega_1(h) + B_1\omega_2(g)) = A\omega_1(h) + B\omega_2(g),$$

где

$$\begin{aligned} A &= (b-a)(d-c)\left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} |p_k|\right), \\ B &= (b-a)(d-c)\left(1 + \sum_{l=0}^{m_1-1} |p'_l|\right)\sum_{k=0}^{m-1} |p_k| \end{aligned} \tag{14}$$

Теорема 3. Пусть функция $f(x,y)$ имеет частные производные порядка r по $x(z \ge 1)$ и s по $y(s \ge 1)$, удовлетворяющие на прямоугольнике $(a \le x \le b), (c \le y \le d)$ условиям

$$\left|f_x^{(r)}(x', y)\right| \le \omega_1(|x' - x|),$$

$$\left|f_y^{(s)}(x, y') - f(x,y)\right| \le \omega_2(|y' - y|),$$

где ω_1, ω_2 - функции, подчиняющиеся неравенствам (2) из разд. 2. Пусть, кроме того, квадратурные формулы (1) точны соответственно для многочленов степеней r и s. Тогда

$$\left|\int_a^b\int_c^d fdxdy-\sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1}L_{ij}(f)\right|\le$$
$$\le(b-a)(d-c)\left[c_r\left(\frac{b-c}{\mu}\right)^r\omega_1\left(\frac{b-a}{\mu}\right)+c_r\sum_{k=0}^{m-1}|p_k|\left(\frac{d-c}{\nu}\right)^s\omega_2\left(\frac{d-c}{\nu}\right)\right].\qquad(15)$$

Доказательство. Из условий, наложенных на функцию $f(x,y)$, следует, что функция $f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu)$ на квадрате $0\le u,\nu\le 1$ принадлежит по переменной u при фиксированном ν классу $W^{(r)}H_{h^r\omega_1,h}(a,b)$, где $\omega_{1,h}(u)=\omega_1(hu)$, и по переменной ν при фиксированном u классу $W^{(s)}H_{g^s\omega_2,g}(c,d)$. Таким образом, по теореме 3 из разд. 6, где надо считать $a=0,b=1,n=1$ и заменить $\omega_1(x)$ на $h^r\omega_1(h\omega)$, будем иметь

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu)du-L_u(\xi_i+hu,\eta_j+g\beta\nu)\right|\le c_rh^r\omega_1(h).$$

Аналогично

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu)d\nu-L_\nu(f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu))\right|\le c_sg^s\omega_2(g)$$

и, следовательно, из (9) на основании неравенства (7), полагая в нем $c'=c_rh^r\omega_1(h)$, $c''=c_sg^s\omega_2(g)$, получим

$$\left|\int_a^b\int_c^d fdxdy-\sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1}L_{ij}(f)\right|\le$$

$$\le hg\sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1}\left|\int_0^1\int_0^1 f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu)dudv-L(0,1,0,1;f(\xi_i+hu,\eta_j+g\nu))\right|\le$$

$$\le\mu\nu hg(c_rh^r\omega_1(h)+c_sg^s\omega_2(g)\sum_{k0}^{m-1}|p_k|)=$$

$$=(b-a)(d-c)\left[c_r\left(\frac{b-a}{\mu}\right)^r\omega_1\left(\frac{b-a}{\mu}\right)+c_s\sum_{k=0}^{m-1}|p_k|\left(\frac{d-c}{\nu}\right)^s\omega_2\left(\frac{d-c}{\nu}\right)\right].$$

Теорема доказана.

10. Экстремальные задачи.

Многообразие различных квадратурных формул бесконечно. В зависимости от требований, предъявляемых к методу приближенного вычисления определенного интеграла, и в зависимости от класса функций, к которым этот метод применяется, квадратурная формула имеет преимущество перед другими формулами.

Этот параграф посвящен решению одной экстремальной задачи, приводящей к квадратурной формуле, дающей наилучшее приближение.

В общем виде проблему можно сформулировать так:

Задан класс функций H, определенных на отрезке $[0,1]$, и задано натуральное число m. Среди всех квадратурных формул

$$\int_0^1 f dx \approx L(f), \tag{1}$$

где

$$L(f) = \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k),\ 0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le 1, \tag{2}$$

требуется определить такую квадратурную формулу, чтобы величина верхней грани

$$\sup_{f \in H} \left| \int_0^1 f dx - L(f) \right| \tag{3}$$

распространенной на все функции f класса H, была наименьшей. Речь идет о выборе на отрезке $[0,1]$ узлов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и весов $p_1, p_2, \ldots, p_m$, при котором приближение, даваемое квадратурной формулой для всего класса функций H, было бы наилучшим среди всех возможных приближений. Решим эту проблему для класса функций f, имеющую ограниченную на отрезке вторую производную. Можно получить различные квадратурные формулы, если узлы и веса подчинены определенным условиям.

Введем в рассмотрение класс функций $W_{\alpha}^{(r)}(M;a,b)$, состоящий из всех функций класса $W^{(r)}(M;a,b)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=...=f^{(r-1)}(\alpha)=0,\ a\le\alpha\le b.$$

В разд. 3 было доказано, что всякая функция $f(x)$, принадлежащая $W_0^r(M;0,1)$, может быть записана в виде интеграла:

$$f(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 K_r(x-t)f^{(r)}(t)dt,$$

где

$$K_r(u)=\begin{cases}u^{r-1},u\ge 0,\\ 0,u<0\end{cases} \tag{4}$$

Известно равенство

$$\int_0^1 fdx-L(f)=\int_0^1 F_r(t)f^{(r)}(t)dt,$$

которое справедливо для всех функций класса $W_0^r(M;0,1)$, где

$$F_r(t)=\frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(1-t)^{r)}}{r}-\sum_{k=1}^m p_k K_r(x_k-t)\right].$$

Отсюда

$$\sup_{f\in W_0^{(r)}(M;0,1)}\left|\int_0^1 fdx-L(f)\right|=\frac{M}{(r-1)!}\int_0^1\left|\frac{(1-t)^r}{r}-\sum_{k=1}^m p_k K_r(x_k-t)\right|dt=$$

$$=\frac{M}{(r-1)!}\int_0^1\left|\frac{u^r}{r}-\sum_{k=1}^m \lambda_{kK_r}(u-u_k)\right|du, \tag{5}$$

где

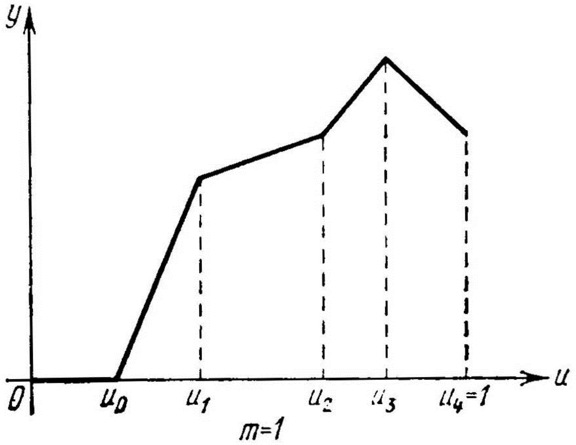
$$\lambda_k=p_{m-k+1},\ u_k=1-x_{m-k+1},\ u_k<u_{k+1} \tag{6}$$

Экстремальная задача в случае класса $W_0^{(r)}(M;a,b)$ сводится к нахождению минимума интеграла (5) среди всевозможных систем чисел λ_k и u_k $(k=1,2,...,m)$ при фиксированном m.

Положим ,

$$\delta_m^{(r)}(u)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k K_r(u-u_k)$$

и рассмотрим случай $r=2$. График функции $\tau_m^{(r)}(u)$ представляет собой ломаную линию, вершины которой имеют абсциссы $u_1,u_2,...,u_m$ (рис.1).



с 5

Каждой наперед заданной ломаломаной значно соответствует определенная система чисел λ_k, а, следовательно, и p_k. При $r=2$ экстремальная задача сводится к нахождению среди ломаных вида $\tau_m^{(2)}(u)$ такой, для которой интеграл (5) достигает своего минимума.

Отметим, что минимум интеграла

$$\int_{a-h}^{a+h}\left|\frac{x^2}{2}-Ax-B\right|dx, h>0$$

среди многочленов второй степени $\frac{x^2}{2} - Ax - B$ с коэффициентом при x^2, равным $\frac{1}{2}$ и произвольными A и B достигается для единственного многочлена:

$$\frac{1}{2}h^2 Q_2\left(\frac{x-a}{h}\right) = \frac{x^2}{2} - ax - \left(\frac{h^2}{8} - \frac{a^2}{2}\right),\ Q_1(x) = x^2 - \frac{1}{4}. \qquad (7)$$

Этот минимум равен

$$\frac{1}{2}h^2 \int_{a-h}^{a+h} \left| Q_2\left(\frac{x-a}{h}\right) \right| dx = \frac{h^3}{2} \int_{-1}^{1} \left| x^2 - \frac{1}{4} \right| dx = \frac{h^3}{4}. \qquad (8)$$

Говорят, что многочлен $\frac{1}{2}h^2 Q_2\left(\frac{x-a}{h}\right)$ наименее уклоняется от нуля в среднем на интервале $(a-h, a+h)$ среди многочленов второй степени с коэффициентом при x^2, равным $\frac{1}{2}$. Взятая с обратным знаком линейная часть

$$ax + \left(\frac{h^2}{8} - \frac{a^2}{2}\right) \qquad (9)$$

многочлена $\frac{1}{2}h^2 Q_2\left(\frac{x-a}{h}\right)$ приближает наилучшим образом в среднем на отрезке $[a-h, a+h]$ функцию $\frac{x^2}{2}$ при помощи многочленов первой степени. Величину $\frac{h^3}{4}$ называют наилучшим приближением в среднем функции $\frac{x^2}{2}$ на отрезке $[a-h, a+h]$ при помощи линейных функций.

Рассмотрим два многочлена (7), наименее уклоняющиеся от нуля, соответствующие интервалам $(a-h,a+h)$ и $(b-h_1,b+h_1)$, где $a+h=b-h_1$. При $x=a+h=b-h_1$ они оба принимают значения $\frac{1}{2}h^2Q_2(1)$ и $\frac{1}{2}h_1{}^2Q_2(-1)$, то значения совпадают тогда и только тогда, когда $h=h_1$. В этом случае угловые коэффициенты линейных частей обоих многочленов различаются на величину

$$b-a=2h. \tag{10}$$

Зададим некоторое положительное число u_1 и пусть $a-h=u_1$, где $h>0$. Подберем h таким, чтобы линейная функция A_1u+B_1, наилучшим образом приближающая в среднем параболу $y=\frac{u^2}{2}$ на интервале $(a-h,a+h)$, обращалась в нуль при $u=u_1$. Поскольку эта функция должна иметь вид (9), то искомое число h должно удовлетворять уравнению

$$(u_1+h)u_1+\frac{h^2}{8}-\frac{(u_1+h)^2}{2}=\frac{u_1{}^2}{2}-\frac{3}{8}h^2=0.$$

Отсюда следует, что

$$h=\frac{2}{\sqrt{3}}u_1,\ a=u_1+h=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}u_1$$

и наилучшая линейная функция равна

$$A_1u+B_1=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}u_1(u-u_1). \tag{11}$$

Пусть

$$u_k=u_1+2(k-1)h, \qquad k=1,2,...,m.$$

На каждом из интервалов (u_k,u_{k+1}) определим линейную функцию A_ku+B_k, приближающую наилучшим образом в среднем $\frac{u^2}{2}$. При $u=u_1$ функция A_1u+B_1 обращается в нуль и графики функций A_ku+B_k $(k=1,2,...,m)$

непрерывно продолжают друг друга в точках $u_1, u_2, ..., u_m$. Все вместе на оси u образуют непрерывную ломаную.

Подберем $u = u_1^*$ так, чтобы $u_{m+1} = 1$; отсюда находим

$$u_1^* = \sqrt{3}\omega_m,\ \omega_m = \frac{1}{\sqrt{3}+4m},$$
$$u_k = (\sqrt{3} + 4(k-1))\omega_m,\ k = 1,2,...,m+1,\ h^* = 2\omega_m \tag{12}$$

Полученная ломаная $\sigma_m^{(2)}(u)$ определена на отрезке $[0,1]$ и является одной из ломаных $\sigma_{m^*}^{(2)}(u)$, которыми мы должны выровнять, чтобы найти минимум интеграла (5) при $r = 2$. Докажем, что именно эта ломаная обращает в минимум интеграл (5) и она единственная.

Величина интеграла при подстановке в него $\sigma_{m^*}^{(2)}(u)$ вследствие (8) и (12) равна

$$\int_0^1 \left| \frac{u^2}{2} - \sigma_{m^*}^2(u) \right| du =$$
$$= \int_0^{u_0^*} \frac{u^2}{2} du + \sum_{K=0}^{m} \int_{U_K^*}^{U_{K+1}^*} \left| \frac{u^2}{2} - A_K^* u - B_K^* \right| du = \frac{n_0^{*3}}{6} + 2m\omega_m^3 = \frac{\omega_m^2}{2}$$

где $y_K = A_K^* u + B_K^*$ есть уравнение звена ломаной $\sigma_{m^*}^{(2)}(n)$, соответствующего интервалу (u^*_k , u^*_{k+1}).

С другой стороны, пусть $\sigma_{m^*}^{(2)}(n)$ есть произвольная ломаная с абсциссами вершин u^*_k, где

$$0 \le u_1 < u_2 < ... < u_m \le u_{m+1} = 1,$$

и пусть $y_K = A_K u + B_K$ есть уравнение линейной функции, наилучшим образом в среднем приближающей $\frac{u^2}{2}$ на интервале (u_k , u_{k+1}). Тогда, принимая во внимание (8), имеем:

$$\int_0^1 \left|\frac{u^2}{2} - \sigma_m^{(2)}(u)\right| du = \int_0^{u_0} \frac{u^2}{2} du + \sum_{k=1}^{m} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left|\frac{u^2}{2} - \sigma_m^{(2)}(u)\right| du \geq$$

$$\geq \frac{u_0^3}{6} + \sum_{k=1}^{m} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left|\frac{u^2}{2} - A_k u + B_k\right| du =$$

$$= \frac{u_0^3}{6} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{u_{k+1}-u_k}{2}\right)^3 = \frac{u_0^3}{6} + \frac{1}{32}\sum_{k=1}^{m}\left(u_{k+1}-u_k\right)^3 . \qquad (13)$$

Чтобы оценить правую часть (13) снизу, нужно найти ее минимум среди всевозможных $u_0, u_2 - u_1, ..., u_{m+1} - u_m$, удовлетворяющих равенству

$$u_0 + \sum_{k=1}^{m}(u_{k+1} - u_k) = 1. \qquad (14)$$

Решая эту задачу как задачу на относительный экстремум, можно показать, что правая часть (13) достигает своего минимума при условии (14) для единственной степени $u_k = u_k^*$, определенных равенством (12).

Итак, доказано, что

$$\sigma_{m^*}^{(2)}(u) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* K_2(u - u_k^*)$$

есть единственная ломаная, которая обращает в минимум интеграл (5). При этом

$$\lambda_k^* = A_k^* - A_{k-1}^* = 2h^* = 4\omega_m,\ k = 2,3,...,m,$$

$$\lambda_1^* = A_1 = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} u_1^* = \left(2+\sqrt{3}\right)\omega_m .$$

Если учесть формулу (6), то приходим к теореме 7.

.

Теорема 7. Среди квадратурных формул вида (1), где m - заданное натуральное число, формула

$$\int_0^1 f dx \approx L_*(f) = \sum_{k=1}^{m} p_k^* f(x_k^*),$$

определяется узлами и весами

$$\begin{aligned} x_k^* &= 4k\omega_m, \quad k = 1,2,...,m, \quad \omega_m = \left(\sqrt{3} + 4m\right)^{-1} \\ p_k^* &= 4\omega_m, \quad k = 1,2,...,m-1, \quad p_m^* = \left(2 + \sqrt{3}\right)\omega_m, \end{aligned} \tag{15}$$

является единственной наилучшей для класса функций $W_0^{(2)}(M;0,1)$. Иначе говоря, имеет место равенство

$$\min_{L(f)} \max_{f \in W_0^1(M;0,1)} \left| \int_0^1 f dx - L(f) \right| = \frac{M\omega_m^2}{2}. \tag{16}$$

Разбиение отрезка $[0,1]$ $(0 < x_1^* < x_2^* < ... < x_m^* < 1)$ узлами x_k^* обладает тем свойством, что все отрезки разбиения, начиная от точки $x = 0$, равны одному и тому же числу $4\omega_m$ и только последний отрезок равен $1 - x_m = \sqrt{3}\omega_m$. Веса в формуле (15) равны одному числу: $p_k^* = 4\omega_m$, а вес последнего отрезка $P_m = \left(2 + \sqrt{3}\right)\omega_m$. Эти свойства наилучшей квадратурной формулы для класса $W_0^2(M;0,1)$ сохраняются и для более сложных наилучших формул, приспособленных для классов $W_0^1(M;0,1)$. Результат теоремы 7 можно перенести с отрезка $[0,1]$ на произвольный отрезок $[\alpha,\beta]$. Узлы x_k^* преобразуются подобным образом, веса p_k^* увеличатся в $l = \beta - \alpha$ раз и точная оценка приближения для класса будет

$$\max_{f \in W_0^1(M;\alpha,\beta)} \left| \int_\alpha^\beta f dx - L_*(f) \right| = \frac{Ml^3\omega_m^2}{2}, \tag{17}$$

т.е. увеличится в l^3 раз.

Полученная квадратурная формула имеет один недостаток. Она дает гарантированную минимальную оценку $\frac{Ml^3\omega_m^2}{2}$ не для всех функций, имеющих ограниченную вторую производную, а только для тех, которые удовлетворяют начальному условию

$$f(0) = f'(0) = 0. \tag{18}$$

Следовательно, если пользоваться полученной формулой в случае, если функция $f(x)$ не удовлетворяет условию (18), нужно предварительно разложить $f(x)$ по формуле Тейлора вблизи $x=0$:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\varphi(x),$$

и отдельно вычислить интеграл от функции $f(0)+xf'(0)$, а затем применять квадратурную формулу к функции $\varphi(x)$. Это гарантирует приближение с оценкой $\dfrac{Ml^3\omega_m^2}{2}$.

Однако, можно построить новую квадратурную формулу без указанного недостатка. При этом квадратурная формула будет наилучшей для всего класса $W^{(2)}(M;0,1)$. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} fdx \approx \sum_{k=-m}^{m}\mu_k f(\xi_k), \tag{19}$$

где получаем в силу равенств (15)

$$\mu_k=\mu_{-k}=p_k^*=5\omega_{m,}\quad -\xi_{-k}=\xi_k=x_k^*=4h\omega_{m,}$$

$$k=1,2,...,m,\quad \mu_0=4\omega_m,\quad \xi_0=0.$$

Таким образом, эта новая квадратурная формула, определенная на отрезке $[-1,1]$, получена путем симметрии старой и добавления одного узла $\xi_0=0$. При этом μ_0 подобрали так, чтобы

$$\sum_{k=-m}^{m}\mu_k=2.$$

Благодаря такому выбору и симметрии формула (19) точна для линейных функций 1 и x, а следовательно, для любой линейной функции. Формула (19) обладает следующим свойством.

Теорема 8. Среди всевозможных квадратурных формул

$$\int_{-1}^{1} fdx \approx \sum_{k=-m}^{m} p_k f(x_k) \tag{20}$$

с $2m+1$ узлами

$$-1 \le x_{-m} < \ldots < x_0 < \ldots < x_m \le 1$$

и весами p_x, где фиксирована только m, формула (19) является единственной наилучшей для класса $W^{(2)}(M;-1,1)$. При этом

$$\sup_{f \in W^{(2)}(M;-1,1)} \left| \int_{-1}^{1} f dx - \sum_{k=-m}^{m} \mu_k f(\xi_k) \right| = M\omega_m^2 .$$

<u>Доказательство.</u> Если квадратурная формула не является точной для всех P_1, то для нее верхняя граница равна ∞. Поэтому достаточно рассмотреть всевозможные квадратурные формулы вида (20), точные для P_1. Имеем

$$E\left[W^2(M;-1,1)\right] = E\left[W_{x_0}^{(2)}(M;-1,1)\right] = \sup_{f \in W_{x_0}^{(2)}(M;-1,x1)} \left| \int_{-1}^{1} f_1 dx - \sum_{k=-m}^{m} p_k f(x_k) \right| =$$

$$= \sup_{f \in W_{x_0}^{(2)}(M;-1,x_0)} \left| \int_{-1}^{x_0} f_1 dx - \sum_{k=-m}^{-1} p_k f_1(x_k) \right| + \sup_{f \in W_{x_0}^{(2)}(M;x_0,1)} \left| \int_{x_0}^{1} f_2 dx - \sum_{k=1}^{m} p_k f_2(x_k) \right| \ge$$

$$\ge \frac{(x_0+1)^3 + (1-x_0)^3}{2} M\omega_m^2 \ge M\omega_m^2 . \qquad (21)$$

Вес определяется из соотношения

$$\sum_{k=-m}^{m} p_k = 1 ,$$

поскольку искомая квадратурная формула точна для $f(x) = 1$. Теорема доказана. Теорему 8 можно доказать для четного числа отрезков разбиения.

11. Наилучшая формула для класса $W_{L_1}^{(n+1)}(M;0,m)$.

Построим квадратурную формулу на отрезке $[o,m]$, где m - натуральное число, при равномерном разбиении отрезка узлами $x_k = k \quad (k = 0,1,...,m)$

$$\int_0^m f(x)dx \approx \sum_{k=0}^m p_k f(k), \tag{1}$$

Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $W_L^{(n+1)}(M;0,m)$. Если квадратурная формула (1) точна для многочленов степени n, но имеет место точная оценка:

$$\sup_{f\in W_{L_2}^{(n+1)}(M;0,m)} \left|\int_0^m fdx - L(f)\right| = M\|F_{n+1}\|_{L_2(0,m)} = M\left(\int_0^m |F_{n+1}(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

где

$$F_{n+1}(t) = \frac{1}{n!}\left[\frac{(m-t)^{n+1}}{n+1} - \sum_{k=0}^m p_k K_{n+1}(k-t)\right],$$

и функция $K_{(n+1)}(u)$ определяется при помощи равенства (3) из разд. 3.

В разд.10 решалась задача об экстремальной задаче, т.е. о нахождении минимума интеграла (2) в случае варьирования узлов. А. Сард [2] решал задачу о нахождении минимума интеграла (2) в случае равностоящих узлов и при этом варьируются веса p_k, которые удовлетворяют условию: квадратурные формулы точны для многочленов P_n степени n:

$$\frac{m^{s+1}}{s+1} = \sum_{k=0}^m p_k k^s, \quad s = 0,1,...,n \tag{3}$$

А.Сард показал, что при заданных натуральных m и n, при которых система (3) имеет решения относительно p_k, поставленная экстремальная задача имеет единственное решение. Кроме того, Сард разработал метод получения чисел p_k, соответствующих экстремальному решению. Метод позволяет эффективно найти точные значения p_k для каждой пары чисел (m,n). Таблица наилучших квадратурных формул для класса $W_{L_2}^{(n+1)}(M;0,m)$ с равностоящими узлами на отрезке $[0,m]$ приведена в $[5]$.

12. Квадратурные формулы, в которые входят значения производных формул.

Мы рассматриваем квадратурные формулы для вычисления определенного интеграла при известных значениях функции в отдельных точках – узлах квадратурной формулы. Однако можно построить более общие квадратурные формулы, в которые входят как значения функции, так и значения производных функций того или иного порядка. Квадратурная формула, в которую входят значения функции $f(x)$ и ее производные до порядка ρ включительно в точках $x_0, x_1, ..., x_m$ в общем виде выглядят следующим образом:

$$\int_0^1 fdx \approx \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) = L(f), \tag{1}$$

где p_{kl} - заданные числа – веса, x_k - заданные точки, удовлетворяющие условию:

$$0 \le x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} \le 1.$$

Если формула (1) точна для многочленов $P_{r-1}(x)$ степени $r-1$, т.е. если для нее приближенное равенство обращается в точное при подстановке вместо f любого многочлена P_{r-1}, то для нее возможно получить точное значение погрешности, выраженное через производную $f^{(r)}(x)$ порядка $r > \rho$.

Нашу формулу удобнее записать следующим образом:

$$\int_0^1 fdx \approx \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\rho} \lambda_k^{(l)} (r-l-1)! f^{(l)}(x_k) = L(f), \tag{2}$$

полагая,

$$p_{kl} = \frac{(r-l-1)!}{r!}\lambda_k^{(l)}.$$

Пусть задана функция $f(x)$, имеющая на отрезке $[0,1]$ кусочно-непрерывную производную $f^{(r)}(x)$. Разложим ее по формуле Тейлора:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{r-1}\frac{x^l}{l!}f^{(l)}(0) + R_r(x) = P_{r-1}(x) + R_r(x),$$

где

$$R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 K_r(x-t)f^{(r)}dt.$$

Отметим, что производная порядка $l<r$ от остаточного члена может быть записана следующим образом:

$$R_r^{(l)}(x) = \frac{1}{(r-l-1)!}\int_0^1 K_{r-1}(x-t)f^{(r)}(t)dt.$$

Поэтому в силу того, что формула (2) точна для P_{r-1} (т.е. узлы x_k и веса $\lambda_k^{(l)}$ связаны условием точности),

$$\int_0^1 fdx - L(f) = \int_0^1 R_r dx - L(R_r) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1\int_0^1 K_r(x-t)f^{(r)}(t)dtdx - \frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho}\lambda_k^{(l)}\int_0^1 K_{r-1}(x_k-t)f^{(r)}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1\int_0^1 (x-t)^{r-1}dxf^{(r-1)}(t)dt - \frac{1}{r!}\int_0^1\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho}\lambda_k^{(l)}K_{r-l}(x_k-t)f^{(r)}(t)dt = \int_0^1 F_r(t)f^{(r)}(t)dt, \quad (3)$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{r!}\left[(1-t)^r - \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho}\lambda_k^{(l)} K_{r-l}(x_k - t)\right]. \tag{4}$$

Получим точное равенство, выражающее оценку приближения квадратурной формулы для данной функции $f(x)$, имеющей на $[0,1]$ производную порядка r.

Квадратурная формула

$$\int_a^b f dx \approx \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho} p'_{kl} f^{(l)}(x'_k) = L(a,b;f)$$

соответствует отрезку $[a,b]$ и подобна формуле (1). Она имеет узлы x'_k на отрезке $[0,1]$ формулы (1). Веса p'_{kl} связана с p_{kl} формулами вида

$$p'_{kl} = h^{l+1} p_{kl},$$

где $h = b - a$. Таким образом, усложненная квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b f dx \approx \sum_{k=0}^{m-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f), \; \xi_k = a + \frac{b-a}{n}k. \tag{5}$$

Для этой формулы выполняются теоремы 1, 4-7 и все общие заключения из разд.7.

13. Интерполяционная формула Эрмита.

Подобно тому, как интерполяционная формула Лагранжа служила источником квадратурных формул вида (11) из разд. 1, интерполяционная формула Эрмита может служить источником для квадратурных формул вида (1) из разд.12, содержащих в себе наряду с значениями интегрируемой функции значения ее производных того или иного порядка.

Зададим на отрезке $[a,b]$ точки $x_0, x_1, ..., x_{m-1}$ и соответствующие им системы чисел

$$
\begin{aligned}
&y_0, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(\rho_0)}, \\
&y_1, y_1^{(1)}, ..., y_1^{(\rho_1)}, \\
&......................., \\
&y_{m-1}, y_{m-1}^{(1)}, ..., y_{m-1}^{(\rho_{M-1})},
\end{aligned}
$$

где $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{m-1}$ - заданные натуральные числа.

Поставим задачу: построить многочлен $P(x)$ степени $n = \rho_0 + \rho_1 + ... + \rho_{m-1} + m - 1$, который обладал бы свойствами

$$P^{(l)}(x_k) = y_k^{(l)}, \quad k = 0,1,...,m-1, \; l = 0,1,...,\rho_k$$

Искомый многочлен единственный. Действительно, если допустить, сто существует два таких многочлена, то их разность $Q(x)$ должна удовлетворять равенствам

$$Q^{(l)}(x_k) = 0, \; k = 0,1,...,m-1, \; l = 0,1,...,\rho_k .$$

Следовательно, точки x_k должны быть нулями $Q(x)$ кратностей $\rho_k + 1$. Это означает, что многочлен $Q(x)$ степени n должен делиться на многочлен

$$\prod_{k=0}^{m-1} (x - x_k)^{\rho_{k+1}}$$

степени $n+1$, а это возможно только, если $Q(x) = 0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что многочлен $P(x)$ может быть записан в виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\rho_k} y_k^{(l)} P_{kl}(x), \tag{1}$$

где

$$P_{kl}(x) = \frac{A(x)}{l!(x - x_k)^{\rho_k + 1 - l}} \left\{ \frac{(x - x_k)^{\rho_k + 1}}{A(x)} \right\}_{(x_k)}^{(\rho_k - l)}, \tag{2}$$

$$A(x) = \prod_{k=0}^{m-1} (x - x_k)^{\rho_k + 1} \;, \; k = 0,1,...,m-1, \; l = 0,1,...,\rho_k .$$

Многочлен $P_{kl}(x)$ подобран так, чтобы он имел степень n и удовлетворял условиям

$$P_{kl}^{(i)}(x_s)=1, \text{ если одновременно } k=s, l=i,$$
$$P_{kl}^{(i)}(x_s)=0 \text{ в остальных случаях, } k=0,1,\ldots,m-1, l=0,1,\ldots,\rho_k. \qquad (3)$$

Это следует из того, что

$$\varphi(x)\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\right\}_{(a)}^{(\mu)}=1+K(x-a)^{\mu+1}+\ldots, \qquad (4)$$

Формуле (1) соответствует общая приближенная интерполяционная *формула Эрмита*

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\rho_k}f^{(l)}(x_k)=P(x), \qquad (5)$$

которая приводит в соответствие заданной функции $f(x)$ многочлен $P(x)$ степени n, удовлетворяющий условиям:

$$f^{(l)}(x_k)=P^{(l)}(x_k),$$

$$k=0,1,\ldots,m-1, \; l=0,1,\ldots,\rho_k.$$

Если проинтегрировать левую и правую части приближенного равенства (5), то получим квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)dx\sim L(f), \qquad (6)$$

где

$$L\ (f)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho_k}p_k'^{(l)}f^{(l)}(x_k),$$

о которой известно, что она точна для всех многочленов степени n, то определяющие ее коэффициенты $p_k'^{(l)}$ совпадают соответственно с числами $p_k^{(l)}$, определенными по формуле (8). Действительно, для любого многочлена $P(x)$ степени не выше n справедливо равенство $L(p)=L_1(P)$.

В частности, если в качестве $P(x)$ взять многочлены $P_{kl}(x)$ вида (2), то, используя свойства (3), получаем

$$p_k^{(l)} = L(P_{kl}) = L(P_{kl}) = p_k'^{(l)},$$

$$k = 0,1,...,m-1, \quad l = 0,1,...,\rho_k,$$

что и требовалось доказать.

14. Общая экстремальная задача.

Решим обобщенную экстремальную задачу для квадратурных формул вида

$$\int_0^1 fdx \approx \frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{r-1}\lambda_k^{(l)}(r-l-1)!\,f^{(l)}(x_k) = L(f), \tag{1}$$

найдем среди квадратурных формул (1) со всевозможными узлами x_k и весами $\lambda_k^{(l)}$, где $0 \le x_1 < x_2 < ..., x_m \le 1$, такую, которая дает наилучшее приближение для класса функций $W_0^{(r)}(M;0,1)$. Здесь предполагается, что r, m - заданные натуральные числа. При этом r - четное число.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$ класса $W_0^{(r)}(M;0,1)$. Она, таким образом, удовлетворяет условиям

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(r-1)}(0),$$

и имеет вид независимо от того, точна или нет формула (1) для многочленов степени $r-1$,

.

$$\int_0^1 fdx - L(f) = \frac{1}{r!}\int_0^1\left[(1-t)^r - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{r-2}\lambda_k^{(i)}K_{r-1}(x_k - t)\right]f^{(r)}(t)dt. \tag{2}$$

Отсюда мера приближения произвольной квадратурной формулы для класса $W_0^r(M;0,1)$ равна

$$\varepsilon_m^{(r)} = \sup_{f\in W_0^{(r)}(M;0,1)}\left[\int_0^1 fdx - L(f)\right] = \frac{M}{r!}\int_0^1\left|(1-t)^r - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{r-1}\lambda_k^{(l)}K_{r-1}(x_x - t)\right|dt\,. \tag{3}$$

Сделав замену

$$1-t=u, \quad \theta_k=1-x_{m-k+1}, \quad \lambda_k^{(l)}=\mu_{m-k+1}^{(r-l-1)}, \tag{4}$$

получим

$$\varepsilon_m^{(r)}=\frac{M}{r!}\int_0^1\left|u^r-\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{r-1}\mu_k^{(l)}K_{l+1}(u-\theta_k)\right|du. \tag{5}$$

При произвольных числах $\mu_k^{(l)}$ сумма

$$\sum_{l=1}^{r-1}\mu_k^{(l)}K_{l+1}(u-\theta_k).$$

На отрезке $[\theta_k,\theta_{k+1}]$ есть произвольный многочлен степени $r-1$, обращающийся в нуль при $u=\theta_k \quad (k=1,2,...,m,\theta_{m+1}=1)$.

Таким образом, принимая во внимание, что $K_s(u-\theta_k)=0$ для $u\le\theta_k$, $s>1$, получаем, что двойная сумма

$$\sigma_m^{(r)}(u)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{r-1}\mu_k^{(l)}K_{l+1}(u-\theta_k) \tag{6}$$

представляет собой произвольную непрерывную на отрезке $[0,\theta_1]$ и равную некоторому многочлену степени $r-1$ на отрезке $[\theta_k,\theta_{k+1}]$ $(k=1,2,...,m)$.

Задача свелась к нахождению минимума интеграла (5) для фиксированного m при варьировании узлами θ_k, удовлетворяющих неравенствам:

$$0\le\theta_1<\theta_2<...<\theta_m\le 1$$

и числам $\mu_m^{(r)}(u)$, или, иначе говоря, при варьировании функциями $\sigma_m^{(r)}(u)$.

Введем определенную на отрезке $[a-h,a+h]$ функцию

$$h^r Q_r\left(\frac{x-a}{h}\right), \quad h>0, \tag{7}$$

где

$$Q_r(x) = \frac{\sin[(r+1)\arccos x]}{2^r\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \le x \le 1.$$

Функция (7) есть алгебраический многочлен степени r

$$h^2 Q_r\left(\frac{x-a}{h}\right) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + a_{r-2}x^{r-2} + \ldots + a_0$$

с коэффициентом при x^r, равным 1. Такой многочлен (7) называем *многочленом степени* r*, наименее уклоняющийся от нуля в среднем на отрезке* $[a-h, a+h]$. Этот многочлен можно трактовать так:

$$\int_{a-h}^{a+h} \le \left|x^r - P_{r-1}(x)\right| dx,$$

где $P_{r-1}(x)$ - произвольный алгебраический многочлен степени $r-1$, достигает своего наименьшего значения для единственного многочлена $P^*_{r-1}(x)$, для которого

$$h^r Q_r\left(\frac{x-a}{h}\right) = x^r - P^*_{r-1}(x) \qquad . \tag{8}$$

Многочлен $P^*_{r-1}(x)$ называют *наилучшим многочленом степени* $r-1$*, приближающим в среднем на отрезке* $[a-h, a+h]$ функцию x^r. Если r четные, то для того, чтобы два многочлена вида (7), наименее уклоняющиеся от нуля на отрезках $[a-h, a+h]$ и $[b-h_1, b+h_1]$, где $a+h = b-h_1$, совпадали в точках $a+h$, необходимо и достаточно выполнение условия $h = h_1$. Действительно, то что многочлены равны в точке $a+h$ сводится к равенству

$$h^r Q_r(1) = h_1^r Q_r(-1) \;,$$

которое эквивалентно равенству $h = h_1$, т.к. при четном r

$$Q_r(1) = Q_r(-1).$$

Зададим положительное число θ_1 и пусть $a-h=\theta_1$, где $h>0$. Подберем h таким образом, чтобы многочлен $P_{r-1,1}(u)$, наилучшим образом приближающий функцию u^r на отрезке $[a-h,a+h]$, где $a-h=\theta_1$, обращался в нуль при функции $u=\theta_1$. Вследствие равенства (8), имеем

$$P_{r-1,1}(\theta)=\theta_1^r h^r Q_r(-1)=Q^r-h^r Q(1)=0\,.$$

Отсюда следует, что

$$\theta_1=\sqrt[r]{Q_r(1)h} \tag{9}$$

и так как

$$Q_r(1)=\frac{r+1}{2^r}=l\,\underset{x\to 1}{im}\,Q_r(x)=l\,\underset{\alpha\to 0}{im}\,\frac{\sin(r+1)\alpha}{2^r\sin\alpha},$$

то

$$\theta_1=\frac{\sqrt[r]{r+1}}{2}h$$

.

Пусть теперь

$$\theta_k=\theta_1+2(k-1)h=\theta_1\frac{\sqrt[r]{r+1}+4(k-1)}{\sqrt[r]{r+1}}\,.$$

Тогда, если мы на каждом из отрезков $[\theta_k;\theta_{k+1}]$ определим многочлены $P_{r-1,k}(u)$, наилучшим образом в среднем приближающие соответственно на них функцию u^r, то графики этих многочленов вместе с отрезком $[0,\theta_1]$, лежащим на оси u, образуют на отрезке $[0,\theta_{m+1}]$ непрерывную кривую.

Мы уже убедились в том, что эта кривая непрерывна в точке θ_1. Пусть теперь a_k есть середина отрезка $[\theta_k,\theta_{k+1}]$, т.е. $\theta_k=a_k-h$, $\theta_{k+1}=a_k+h$. Тогда

$$u^r-P_{r-1,k}(u)=h^3 Q_r\left(\frac{u-a_k}{h}\right)\text{ на }(\theta_k,\theta_{k+1}),$$

$$u^r - P_{r-1,k+1}(u) = h^3 Q_r\left(\frac{u-a_k+1}{h}\right) \text{ на } (\theta_{k+1}, \theta_{k+2}).$$

Подставив в эти функции одно и то же значение $u = a_k + h = a_k - h$, получим равные числа $h^r Q_r(1) = h^r Q_r(-1)$, откуда

$$P_{r-1,k}(Q_{k+1}) = P_{r-1,k+1}(\theta_{k+1}),\ k = 1,2,...,m-1.$$

Подберем θ_1 так, чтобы $\theta_{m+1} = 1$, тогда

$$\begin{aligned} \theta_k^* &= \frac{4(k-1)\sqrt[r]{r+1}}{4m+\sqrt[r]{r+1}}, \quad k = 1,2,...,m, \\ h_n^* &= \frac{2}{4m+\sqrt[r]{r+1}}, \end{aligned} \tag{10}$$

и соответствующая полученной системе точек θ_k^* кривая является одной из определенных выше кривых $\sigma_m^{(r)}(u)$. Обозначим эту кривую $\sigma_{m_*}^{(r)}(u)$ и докажем, что именно для нее и только для нее интеграл (5) достигает своего минимума.

Пусть

$$\overline{\theta}_k = \frac{\theta_k^* + \theta_{k+1}^*}{2}, \quad k = 1,2,...,m.$$

Величина нашего интеграла при подстановке в него $\sigma_{m_*}^{(r)}(u)$ равна

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r!}\int_0^1 \left|u^r - \sigma_{m_*}^{(r)}(u)\right| du = \frac{1}{r!}\left[\int_0^{\theta_1^*} u^r\, du + \sum_{k=1}^m \int_{\overline{\theta}_k - h_*}^{\overline{\theta}_k + h} \left| h_*^r Q_r\left(\frac{u-\overline{\theta}_k}{h_*}\right)\right| du\right] = \\ &= \frac{1}{r!}\left[\frac{(\theta_1^*)^{r+1}}{r+1} + \frac{m h_*^{r+1}}{2^{r-1}}\right] = \frac{1}{r!(4m+\sqrt[r]{r+1})} \end{aligned} \tag{11}$$

С другой стороны, если $\sigma_m^{(r)}(u)$ - произвольная, определенная выше функция, то она имеет такой вид:

$$\sigma_m^{(r)}(u) = \begin{cases} 0 & 0 \le u \le \theta_1 \\ P_{r-1,k}(u), & \theta_k \le u \le \theta_{k+1}, \end{cases} \quad k = 1,2,...,m, \tag{12}$$

где $P_{r-1,k}(u)$ - многочлены степени $r-1$. Поэтому, полагая $2\theta'_k=\theta_k+\theta_{k+1}$, получаем

$$\frac{1}{r!}\int_0^1\left|u^r-\sigma_m^{(r)}(u)\right|du=\frac{1}{r!}\left[\int_0^{\theta_1}u^r du+\sum_{k=1}^{m}\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}\left|u^r-P_{r-1,k}(u)\right|du\right]\geq$$
$$\geq\frac{1}{r!}\left[\frac{\theta_1^{r+1}}{r+1}+\sum_{k=1}^{m}\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}\left(\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{2}\right)^r\left|\frac{2(u-\theta'_k)}{\theta_{k+1}-\theta_k}\right|du\right]= \tag{13}$$
$$=\frac{1}{r!}\left[\frac{\theta_1^{r+1}}{r+1}+2^{\frac{1}{r-1}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{2}\right)^{r+1}\right]=\frac{1}{r!}\left[\frac{\theta_1^{r+1}}{r+1}+\frac{1}{2^{2r}}\sum_{k=1}^{m}\left(\theta_{k+1}-\theta_k\right)^{r+1}\right]$$

Чтобы оценить правую часть (13) снизу, мы должны найти ее минимум среди всевозможных $\theta_1,\theta_2-\theta_1,...,\theta_{m-1}-\theta_m$,

$$\theta_1+\sum_{k=1}^{m}\left(\theta_{k+1}-\theta_k\right)=1 \tag{14}$$

Решение этой задачи на относительный минимум приводит к тому, что правая часть (13) достигает минимума при условии (14) для единственной системы значений $\theta_k=\theta_k^*$, определенных равенствами (10).

Вычислим коэффициенты $\mu_{k*}^{(l)}$, соответствующих минимуму интеграла (5). На отрезке $[\theta_1^*,\theta_2^*]$ функция, стоящая под знаком абсолютной величины в интеграле (5) равна

$$u^r-\sum_{l=1}^{r-1}\mu_{1^*1}^{(l)}(u-\theta_1^*)^l=h^rQ_r\left(-1+\frac{u-\theta_1^*}{h^*}\right)=h_*^r\left[Q_r(-1)+\frac{u-\theta_1^*}{h^*}Q'_r(-1)+...+\frac{(u-\theta_1^*)^r}{h^*r!}Q_r^{(r)}(-1)\right]$$
.

Отсюда, разлагая u^r по степеням $u-\theta_1^*$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$\mu_{1*}^{(l)} = \frac{h_*^{r-1}}{l!}\left\{\frac{r!}{(r-l)!}\left[Q_r(1)\right]^{(r-1)/r} - Q_r^{(l)}(-1)\right\} \tag{15}$$

$$l = 1,2,\dots,r-1,$$

и, подставляя вместо $Q_r(1)$ и h_* их величины, получаем

$$\mu_{1*}^{(l)} = \frac{1}{l!(4m+\sqrt[r]{r+1})^{r-l}}\left[\frac{r!}{(r-l)!}(r+1)^{(r-1)/r} - 2^{r-l}Q_r^{(l)}(-1)\right] \tag{16}$$

$$l = 1,2,\dots,r-1.$$

Если учесть свойства функций $K_{l+1}(u-\theta_k)$, то нетрудно видеть, что на отрезке $[\theta_k^*,\theta_{k+1}^*]$ функция, стоящая под знаком абсолютной величины в интеграле (5), при $\mu_k^{(l)} = \mu_{1*}^{(l)}$ равна:

$$h_*^r Q_r\left(-1+\frac{u-\theta_k^*}{h_*}\right) - \sum_{l=1}^{r-1}\mu_{k*}^{(l)}(u-\theta_k)^l ,$$

$$k = 2,3,\dots,m .$$

Если принять во внимание, что при четном r функция $Q_r(x)$ четная u, таким образом, $Q_r^{(l)}(-1) = (-1)^l Q_r^{(l)}(1)$, тогда

$$\sum_{l=1}^{r-1}\mu_{k*}^{(l)}(u-\theta_k^*)^l = h_*^r\left[Q_r\left(-1+\frac{u-\theta_k^*}{h_*}\right) - Q_r\left(-1+\frac{u-\theta_k^*}{k_*}\right)\right] =$$

$$= 2h_*^r\left[\frac{u-\theta_k^*}{h_*}Q_r'(1) + \frac{(u-\theta_k^*)^3}{3!\,h_*^{\,3}}Q_r'''(1) + \dots + \frac{(u-\theta_k^*)^{r-1}}{(r-1)!\,h_*^{\,r-1}}Q_r^{\,(r-1)}(1)\right].$$

Таким образом, для $k = 2,3,\dots,m$

$$\mu_{k*}^{(2i)} = 0, \quad i = 1,2,\dots,\frac{r-2}{2},$$

$$\mu_{k*}^{(2i+1)} = \frac{2h_*^{r-2i-1}}{(2i+1)!}Q_r^{(2i+1)}(1), \quad i = 0,1,\dots,\frac{r-2}{2}.$$

Пересчет на исходные узлы x_k^* и коэффициенты $\lambda_{k*}^{(l)}$ приводит к следующим результатам:

$$x_k^* = 2kh_*, \quad k = 1,2,...,m;$$

$$\lambda_{h*}^{(2i+1)} = 0, \quad i = 0,1,...,\frac{r-4}{2}, \quad k = 1,2,...,m-1;$$

$$\lambda_{k*}^{(2i)} = \frac{2h_*^{2i+1}}{(r-2i-1)!} Q_r^{(r-2i-1)}(1) \tag{17}$$

$$i = 0,1,...,\frac{r-2}{2}, \quad k = 1,2,...,m-1;$$

$$\lambda_{m*}^{(l)} = \frac{h_*^{l+1}}{(r-l-1)!}\left\{\frac{r!}{(l+1)!}\left[Q_r(1)\right]^{\frac{l+1}{r}} - Q_r^{(r-l-1)}(-1)\right\}, \ l = 0,1,...,r-2,$$

где

$$h_* = \frac{2}{4m + \sqrt[r]{r+1}} = 2\omega_m \tag{18}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 10. Среди квадратурных формул вида (1), определяемых при фиксированных m, r (четном) произвольными коэффициентами $\lambda_k^{(l)}$ и узлами x_k, где $0 \le x_1 < x_2 < ... < x_m \le 1$, наилучший для класса $W_0^{(r)}(M;0,1)$ является единственная формула

$$\int_0^1 fdx \approx L_*(f)$$

с коэффициентами $\lambda_{k*}^{(l)}$ и узлами x_k^*, выражаемыми при помощи (17), (18) и с мерой уклонения, равной

$$\sup_{f \in W_0^{(r)}(M;0,1)} \left[\int_0^1 fdx - L_*(f)\right] = M\frac{\omega_m^r}{r!}. \tag{19}$$

Оценка (19) следует из (13), где в правой части надо положить $\theta_k = \theta_k^*$.

П р и м е ч а н и е. h_* есть функция от m, а веса $\lambda_{k*}^{(l)}$ имеют вид $\lambda_{k_*}^{(l)} = C_{r,k}^{(l)} h_*^{l+1}$ не зависят от h_*. При $k = 1,2,...,m-1$ коэффициенты $C_{r,k}^{(l)}$ равны одному и томе числу. Соответствующая наилучшая квадратурная формула на отрезке $[a,b]$ длины $d=b-a$ для класса $W_0^{(r)}(M;a,b)$ имеет узлы $x'_{k*}=a+2kh_*d \quad (k=1,2,...,m)$ и веса $\left(\lambda_{k*}^{(l;)}\right)'=C_{r,k}^{(l)}(h_*d)^{l+1}$. Полученную в теореме 10 квадратурную формулу, наилучшую для класса $W_0^1(M;0,1)$, можно сделать симметричной и прийти к квадратурной формуле, наилучшей для класса $W^{(r)}(M;-1,1)$. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 11. Среди квадратурных формул вида

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{r!}\sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=0}^{r-2}\lambda_k^{(l)}(r-l-1)!\,f^{(l)}(x_k)=L(f),$$

определяемых при фиксированных m,r (четном) произвольными коэффициентами λ_k^l и узлами $-1<x_{-m}<...<x_{-1}<x_0<x_1<...<x_m<1$, наилучшей для класса $W^{(r)}(M;-1,1)$. Является единственная формула

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \widetilde{L}(f)$$

с коэффициентами $\mu_k^{(l)}$ и узлами y_k, выраженными при помощи равенств

$$-y_{-k}=y_k=4k\omega_m, \quad k=0,1,...,m; \tag{20}$$

$$\mu_{-k}^{(2i)}=\mu_k^{(2i)}=\lambda_{k*}^{(2i)}=\frac{2}{(r-2i-1)!}(2\omega_m)^{2i+1}Q_r^{(r-2i-1)}(1), \tag{21}$$

$$k=0,1,...,m-1, \quad i=0,1,...,\frac{r-2}{2}; \tag{22}$$

$$k=-(m-1),...,(m-1), \quad i=0,1,...,\frac{r-4}{2};$$

$$(-1)^i\mu_{-m}^{(l)}=\mu_m^{(l)}=\lambda_{m*}^{(l)}=\frac{2(2\omega_m)^{l+1}}{(r-l-1)!}\left[\frac{r!}{(l+1)!}Q_r(1)^{\frac{l+1}{r}}-Q_r^{(r-l-1)}(-1)\right]; \tag{23}$$

$$\omega_m=\left(4m+\sqrt[r]{r+1}\right)^{-1}(\lambda_{k*}^{(l)},x_{k*}).$$

При этом

$$\sup_{f\in W^{(r)}(M;-1,1)}\left|\int_{-1}^{1} fdx-\widetilde{L}(f)\right|=\frac{2M\omega_m^r}{r!} \qquad (24)$$

Видим, что узлы y_k и веса $\mu_k^{(l)}$ новой квадратурной формулы с $2m+1$ узлами, наилучшей для класса $W^r(M;-1,1)$, получаются симметризацией узлов и весов формулы, наилучшей для класса $W_0^{(r)}(M;0,1)$, и добавлением одного среднего узла y_0 вместе с весами $\lambda_{k*}^{(l)} \quad (k=\pm1,\pm2,...,\pm(m-1))$.

Доказательство. Будем рассматривать квадратурные формулы (20), точные для многочленов P_{r-1}. Имеем

$$\begin{aligned}
&\sup_{f\in W^{(r)}(M;-1,1)}\left[\int_{-1}^{1} fdx-\frac{1}{r!}\sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=0}^{r-2}\lambda_k^{(l)}(r-l-1)!f^{(l)}(x_k)\right]=\\
&=\sup_{f\in W_{x_0}^{(r)}(M;-1,1)}\left[\int_{-1}^{1} fdx-\frac{1}{r!}\sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=0}^{r-2}\quad\right]=\\
&=\sup_{f\in W_{x_0}^{(r)}(M;-1,x_0)}\left[\int_{-1}^{x_0} fdx-\frac{1}{r!}\sum_{k=-m}^{-1}\sum_{l=0}^{r-2}\quad\right]+\sup_{f_r\in W_{x_0}^{(r)}(M;x_0,1)}\left[\int_{0}^{1} fdx-\frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{r-2}\quad\right]\geq\\
&\geq M\left[(x_0+1)^{r+1}+(1-x_0)^{r+1}\right]\frac{\omega_m^r}{r!}\geq\frac{2M}{r!}\omega_m^r
\end{aligned} \qquad (25)$$

Подставляя в квадратурную формулу (20) вместо вектора узлов и весов $(x_k=y_k \quad (k=-m,...,m), \quad \lambda_k^{(l)}=\lambda_k^{(l)} \quad (k=\pm1,\pm2,...,\pm m))$ единицу, получим уравнение, из которого находится $\lambda_0^{(0)}=\mu_0^{(0)}$. Подставляя далее x, находим $\mu_0^{(1)}$ и так далее до $\mu_0^{(r-2)}$. Остается проверить, что функция x^{r-1} автоматически обращает в равенство полученную таким образом квадратурную формулу.

Но в силу нечетности $r-1$

$$\int_{-}^{1} x^{r-1}dx=0\,.$$

Кроме того,

$$\sum_{k=-m}^{m} \mu_k^{(l)} y_k^{r-1-l} = 0, \quad l = 0,1,\dots,r-2. \tag{26}$$

Поскольку $y_0^{r-1-l} = 0$ и если l - четное, то переменная $\mu_k^{(l)}$ - четная, а переменная y_k^{r-1-l} - нечетная.

Этим доказано, что квадратурная формула вида (20), точна для многочленов P_{r-1} и наилучшая для класса $W^{(r)}(M;-1,1)$ существует и единственная.

15. Многочлен Чебышева, наименее уклоняющийся от нуля.

Рассмотрим функции

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \tag{1}$$

$$Q_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{2^n \sqrt{1-x^2}}, \tag{2}$$

заданные на отрезке $[-1,1]$. Первая из них называется многочленом Чебышева степени n, наименее уклоняющиеся от нуля в метрике непрерывных функций. Вторую формулу называют многочленом Чебышева второго рода. Это многочлен степени n, наименее уклоняющийся от нуля в среднем. С точностью до постоянного множителя функция $Q_n(x)$ есть производная от многочлена Чебышева $T_{n+1}(x)$.

Убедимся, что $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ действительно являются алгебраическими многочленами степени n с коэффициентами при x^n, равными 1, т.е. обе эти функции можно представить в виде

$$T_n(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

$$Q_n(x) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0,$$

где $a_к$, $b_к$ – некоторые числа. Это доказывается индукцией по n. Утверждение верно при n=1, т.к. $Q_1(x) = T_1(x) = x$.

Допустим, что утверждение верно для n-1, тогда

$$T_n(x)=\frac{x\cos[(n-1)\arccos x]}{2^{n-1}}-\frac{\sqrt{1-x^2}\,\sin[(n-1)\arccos x]}{2^{n-1}}=$$

$$=(\frac{x^n}{2}+...)-\frac{(1-x^2)\sin[(n-1)\arccos x]}{2^{n-1}\sqrt{1-x^2}}=(\frac{x^n}{2}+...)+(\frac{x^n}{2}+...)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...,$$

$$Q_n(x)=\frac{x\sin(n\arccos x)}{2^{n-1}\sqrt{1-x^2}}+\frac{\cos(n\arccos x)}{2^n}=$$

$$=(\frac{x^n}{2}+...)-\frac{(1-x^2)\sin[(n-1)\arccos x]}{2^{n-1}\sqrt{1-x^2}}=(\frac{x^n}{2}+...)+(\frac{x^n}{2}+...)=x^n+b_{n-1}x^{n-1}+...,$$

т.е. утверждение верно для n.

Многочлен Чебышева $T_n(x)$ обладает следующим свойством:

$$\max_{-1\le x\le 1}|T_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Максимум достигается в n+1 точках x_k отрезка [-1, 1], определяемых равенством

$$x_k=\cos\frac{k\pi}{n},\quad k=0,1,...,n, \tag{3}$$

и значения $T_n(x_k)$ многочлена в этих точках равны для к=0, 1, …, n, переменные меняют знак: $\frac{1}{2^{n-1}}$ *или* $-\frac{1}{2^{n-1}}$.

Из этого следует важнейшее свойство многочлена Чебышева. Среди многочленов $P_n(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, степени n с коэффициентами при x^n равными 1, многочлен Чебышева единственный, для которого максимум модуля $P_n(x)$ на отрезке [-1, 1], достигает своего минимума, т.е.

$$\max_{-1\le x\le 1}|P_n(x)|\ge\max_{-1\le x\le 1}|T_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Действительно, если алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени n с коэффициентами при x^n равными 1, отличен от $T_n(x)$, то

$$\max_{-1\le x\le 1} | P_n(x) | > \max_{-1\le x\le 1} | T_n(x) | .$$

Если бы это было не так, то представляя $P_n(x)$ в виде суммы:

$$P_n(x) = T_n(x)+P_{n-1}(x),$$

мы бы получили, что $P_{n-1}(x)$, есть многочлен степени $n-1$, для которого в определенных $n+1$ точках x_k выполняются неравенства

$$(-1)^{k+1} P_{n-1}(x_k) \ge 0, \quad k = 0,1,...,n .$$

Применяя теорему Ролля, приходим к тому, что многочлен $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$ обращается в нуль в n точках и, следовательно, тождественно равен нулю, т.е. $P_n(x) \equiv T_n(x)$, а это противоречит тому, что P_n и T_n отличны друг т друга.

Докажем аналогичное свойство многочлена $Q_n(x)$.

Среди многочленов $P_n(x)$ степени n с коэффициентом при x^n равным 1, многочлен $Q_n(x)$ - единственный, для которого интеграл

$$\int_{-1}^{1} |P_n(x)| dx$$

достигает своего минимума, т.е.

$$\int_{-1}^{1} |P_n(x)| dx \ge \int_{-1}^{1} |Q_n(x)| dx = \frac{1}{2^n} \int_{0}^{\pi} |\sin(n+1)\theta| d\theta = \frac{1}{2^{n-1}} . \tag{4}$$

Это свойство многочлена $Q_n(x)$ устанавливает, что функция

$$q(x) = sign Q_n(x) = sign \sin[(n+1)\arccos x]$$

ортогональна на отрезке $[-1,1]$ ко всем многочленам степени $n-1$, т.е. для всех многочленов $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$ имеет место равенство

$$\int_{-1}^{1} q(x) P_n(x-1) dx = 0 \tag{5}$$

Действительно, пусть $P_n(x)$ - отличный от $Q_n(x)$ многочлен степени n с коэффициентом при x^n, равным 1. Тогда, если считать

$$Q_n(x) = x^n + q_{n-1}(x), \quad P_n(x) = x^n + p_{n-1}(x),$$

где q_{n-1}, p_{n-1} - некоторые многочлены степени $n-1$, в силу (5) имеем

$$\int_{-1}^{1} |Q_n(x)| dx = \int_{-1}^{1} Q_n(x) q(x) dx = \int_{-1}^{1} x^n q(x) dx = \int_{-1}^{1} P_n(x) q(x) dx < \int_{-1}^{1} |P_n(x)| dx.$$

Осталось доказать равенство (5). Ряд Фурье функции $q(\cos\theta)$ имеет вид:

$$q(\cos\theta) = sign[\sin(n+1)\theta] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)(n+1)\theta}{2k+1}.$$

Отсюда для $k = 0,1,\ldots,n-1$

$$\int_{-1}^{1} x^k q(x) dx = -\int_{0}^{\pi} \cos^k \theta \, sign[\sin(n+1)\theta] \sin\theta \, d\theta = 0, \tag{6}$$

т.к. функция $\cos^k \theta \sin\theta$ есть нечетный тригонометрический полином порядка $k+1 \le n$, т.е. она может быть представлена в следующем виде:

$$\cos^k \theta \sin\theta = \sum_{l=1}^{k+1} \alpha_l \sin l\theta, \; k+1 \ge n,$$

а разложение функции $sign[\sin(n+1)\theta]$ в ряд Фурье содержит синусы только кратностей $l > n$.

Из равенств (6) следует равенство (5) для всех многочленов степени $n-1$.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Численные методы /Н.С. Бахвалов, Н.П. Жуков, Г.П. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 599с.

2. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 327с.

3. Крылов В.И. Справочная книга по численному интегрированию / В.И. Крылов, Л.Т. Шульгина. – М.: Наука, 1966. – 370с.

4. Крылов В.И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бобков, Т.И. Монастырский. – Т1 – М.: Наука, 1976. – 303с.

5. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988. – 255с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Численное интегрирование

Методические указания
к практическим занятиям
по курсу «Квадратурные формулы»

Редактор *Т.В. Веденеева*
Технический редактор *Н.А. Вьялкова*
Корректор *Н.А. Сидельникова*
Компьютерная верстка *С.П. Черновай*

ИД №06494 от 26.12.01

Сдано в производство 21.02.07. Формат $60\times84\,{}^1\!/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,95.
Уч.-изд. л. 4,71. Тираж 100. Заказ № 112. «С» 19.

Издательство Пензенского государственного университета.
440026, Пенза, Красная, 40